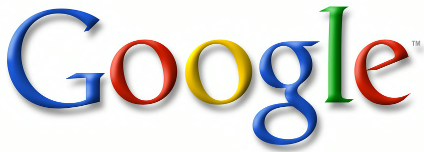


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

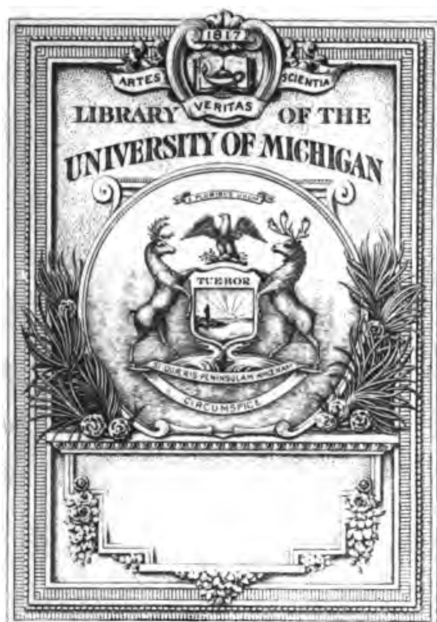
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Digitized by Google

QA
35
.T122

Col. Compl.

12597

3.

Digitized by Google

Digitized by Google

ANDREÆ TACQUET

E SOCIETATE JESU

GEOMETRIA PRACTICA

TRIBUS LIBRIS

COMPREHENSA.



MEDIOLANI,
Excudit FRANCISCUS AGNELLI
ANNO MDCCXLI.
PUBLICA AUCTORITATE, AC PRIVILEGIO.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
7-30-34

ARGUMENTUM.



Duplex Geometria est, Theorica, & Practica. Illa quantitatis continuæ, quam uno nomine Geometræ magnitudinem appellant, affectiones abstractè, & generatim considerat, ac demonstrat, estque cum Arithmetica Matheseos universæ basis, ac fundamentum. Hæc ad illam sese habet, ut rivus ad fontem, & magnitudines de facto existentes expendit, metiturque. Quidquid igitur in Cœlo, terráve, & quantum est ad practicam spectat Geometriam. Quare partes illius sunt, metiri rerum distantias, Montium, ac Turrium altitudines, profunditates puteorum, ac vallium, superficies camporum, & corporum quorumcumque soliditatem cognoscere. Nec his contenta ambitum Orbis terræ, ac molem mirabili artificio investigat: atque inde in Cœlum ipsum provecta Lunæ, ac Solis à Terrá distantias magnitudinesque, ac cæterorum corporum cœlestium quantitatem sagacitate humanâ propè majori assequitur. Sed rerum adeò reconditarum cognitio subitò,

11-26-30 XGS

Digitized by Google

atque uno quasi impetu non obtinetur: Quemadmodum enim in Montis, aut Turris verticem per gradus, & scalas ascenditur, ita & in hisce scientiis sui quidam sunt gradus, per quos in earum abdita quæque, & arcana facili negotio penetratur. Porrò hi gradus sunt Elementa Geomtriæ, & Arithmeticæ, ad quæ proinde intelligenda diligenter incumbat necesse est, qui tum ea, quæ tractaturi modò sumus, tum cætera Matheseos admiranda percipere desiderat.



NO-

Digitized by Google

NOTANDUM

Universim in hac Geometria Practica,

1. *Cum citantur elementa, citari ea quæ nos edidimus, quæ conveniunt cum Euclidæis in numeris propositionum, non tamen in definitionibus, Corollariis, Scholiis, & aliis multis, quæ addidimus.*

2. *In citationibus Problematum &c. huius tractatus, cum non additur numerus capitis, semper spectare problema &c. ad caput, in quo versamur.*

3. *Cum agitur de mensuris, ex. gr. pedibus, milliariis &c. si post aliquem numerum sequantur alii punctis distincti, primum, qui ante punctum est, esse integrum, reliquos decimales: ut si occurrant milliaria 25. 3. 5. 1. 4, designantur mill. 25, & 3 decimæ, 5 centesimæ, 1 millesima, & sic deinceps.*

4. *Quod si agatur de gradibus, numerus ante puncta sunt gradus, reliqui minuta prima, secunda, tertia &c. Ut si offerantur grad. 34. 2. 31. 23. 5, designantur grad. 34, min. 2, secunda 31, tertia 23, & sic deinceps.*

Digitized by Google

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER I.

De dimenſione linearum rectarum.



CUm lineas audimus, non eas ſolùm oportet intelligere, quæ atramento in chartâ, aut cretâ deſcribuntur in tabulâ, ſed eas præſertim, quæ rebus inſunt, hoc eſt omnium hujus univerſi ſuperficierum, ac corporum aſpectabilium in longum, latum, ac profundum dimenſiones. Cum igitur lineas menſurabimus, fluminum, & camporum longitudines, ac latitudines, amplitudinem Horizontis conſpicui, Iridis diametrum, altitudines turrium, montium, nubium, imò Solis, ac Lunæ, & ſiderum reliquorum metiemur. Quæ res cùm per ſe maximè admirabiles, & ſcitu jucundiſſimæ ſint, tum multò admirabiliores, ac jucundiores evadent, quando non praxim tantùm, ſed etiam Theoriam, explicatis earum rerum fundamentis, intelligemus.

Digitized by Google

CAPUT PRIMUM.

De Menſuris.

MEnſura eſt magnitudo quæpiam data ſive pro libito aſſumpta, cujus applicatione aliæ ipsâ majores innoteſcunt. Cum enim ſcitur quoties menſura data in magnitudine menſurandâ contineatur, magnitudo ea dicitur eſſe nota, ſive quantitatis exploratæ. Cum autem tres ſint magnitudinis ſpecies, linea, ſuperficies, corpus; triplex quoque menſura eſt, linearis, ſuperficialis, & corporea, ſeu ſolida; lineæ ſiquidem per lineam, ſuperficies per ſuperficiem, corpora, ſeù ſolida per ſolidum menſurantur. Non tamen ſuperficies per quamlibet ſuperficiem, neque ſolida per quodlibet ſolidum; ſed hæc per cubum, illa per quadratum metimur, quia quadratum,& cubus figuræ ſunt maximè ſimplices, adeoque notiores: quadratum enim fit ex uno ductu lineæ in ſeipſam, cubus verò ex ductu lineæ in ſe ipſam duplicato generatur: nam linea in ſe ducta facit quadratum, quo ducto rurſum in eandem lineam gignitur cubus, cum tamen menſura ſimpliciter nominatur, ſemper linearis intelligitur.

Menſuræ præ cæteris uſitatæ ſunt digitus, pes, paſſus, pertica, milliare.

Pes dividi ſolet in partes æquales 10, vel 11, vel 12, vel 16, & hæ partes vocantur Digiti.

Paſſus continet pedes 5.

Pertica pedes 10, vel 12, vel 16, vel 20.

Milliare paſſus 1000, ſeu pedes 5000.

Digitized by Google

Porrò hæ menſuræ incertæ ſunt, niſi pedis quantitas ad quam illæ referuntur, fuerit determinata. Pes verò tot propè magnitudines ſortitur diverſas, quot ſunt civitates. Nos eo utemur, qui hìc, ubi iſta ſcribimus, verſatur in manibus, videlicet Antverpienſi; ex aliis verò duos, Rhynlandicum, & Italicum Bononienſem adhibebimus; quos ex omnibus viſum eſt ſeligere, quod per eos milliaris Italici, ac Belgici, ſive horarii, quantitas determinetur.

Conſtitutio pedis.

Proportio trium prædictorum pedum ea eſt, quæ inter numeros 1000, 1200. 909. proinde quarum partium Rhynlandicus eſt 1000, earum Bononienſis eſt 1200 (adeoque Rhynlandicus ad Bononienſem eſt ut 5 ad 6) Antverpienſis 909.

Pes	Rhynlandicus	1000	5
	Bononienſis	1200	6
	Antverpienſis	909	

Rhynlandicum eſſe ad Antverpienſem, ut 1000 ad 909 habemus ex obſervatione Willebrordi Snellii in ſuo Eratoſthene Batavo, ubi ſummâ diligentiâ variarum urbium pedes cum Leydenſi, ſive Rhynlandico confert.

Rhynlandicum verò eſſe ad Bononienſem, ut 5 ad 6, ſic oſtendo. Ex obſervatione (a) Riccioli pes Bononienſis eſt ad pedem Romanum antiquum, ſeu Veſpaſianeum, ut 1495 ad 1200, hoc eſt quàm proximè ut 5 ad 4: ſi enim pro 1495 ponantur 1500, haberetur exactè proportio 5 ad 4: differentia eſt 5, quæ ſolùm eſt pars 299 numeri 1495, ac proinde contemni po-

(a) *Lib. 2. cap 8. nu. 2. quam num. 7. egregiè ſtabilit.*

ni poteſt. Igitur pes Bonon. eſt ad Veſpaſianeum, ut 5 ad 4, ſive ut 6 ad $\frac{14}{5}$. Pes autem Veſpaſianeus ad Rhynlandicum, ſeu Leydenſem, ut 24 ad 25, ſive ut $\frac{24}{5}$ ad $\frac{600}{125}$ ut compertum à Ricciolo *pag*. 62. *num*. 6. Igitur ex æquo pes Bononien. eſt ad Rhynlandicum pedem, ut 6 ad $\frac{200}{120}$, hoc eſt ut 6 ad 5. Quod ſi præciſionem omnimodam deſideres, erit Bononienſis pes ad Rhynlandicum, ut 6 $\frac{1}{299}$ ad 5. Sed ea fractiuncula, ut dixi, meritò contemnitur.

Conſtitutio Milliaris.

Milliare Belgicum, ſive horarium eſt, quod ſpatio unius horæ commodè à mediocri pedite abſolvitur. Ex accuratâ Snellii obſervatione complectitur pedes Rhynlandicos 18000, ſive decempedas Rhynland. 1800.

Ut ſcias quot Pedes Bononien. contineat milliare horarium, ſic age. Quia pes Rhynl. eſt ad Bononienſem, ut 5 ad 6, quanto 5 minus eſt quàm 6, tanto reciprocè numerus Pedum Bononienſium conficiens milliare horarium minor erit numero Pedum Rhynlandicorum conficientium milliare horarium, ac proinde quæſtio pertinet ad regulam proportionum everſam,

Pes Rhynl.	Mill. hor.	pes Bonon.	Mill. hor.
5	18000	6	......,

quam ſolve, ut tradidi Arith. *lib*. 4. *cap*. 1. Nimirum duc primum 5 in ſecundum 18000, & productum 90000 divide per tertium: quotiens 15000 ſunt pedes Bononienſes milliare horarium conficientes.

Pari modo, quia pes Rhynlandicus eſt ad

Ant-

Digitized by Google

Antverpienſem, ut 1000 ad 909, milliare horarium continebit pedes Antverpienſes 19, 801 $\frac{891}{909}$.

Milliare Bononienſe continet 5000 pedum Bononienſium, & quia pes Bononienſis eſt ad Rhynlandicum, ut 6 ad 5; milliare Bononienſe continebit (*a*) pedes Rhynl. 6000. Rurſum quia pes Bononienſis eſt ad Antverpienſem, ut 1200 ad 909, milliare Bononienſe (*b*) continebit pedes Antverpienſes 6600 $\frac{100}{303}$.

(a) *Per reg. proport. everſam.*
(b) *Per eand.*

Ut hactenùs dicta paucis complectar,

Milliare horarium, ſeu Belgicum continet

Pedes Rhynlandicos 18, 000
Pedes Bononienſes 15, 000
Pedes Antverpienſes 19, 801 $\frac{891}{909}$.

Milliare Italicum Bononienſe continet

Pedes Bononienſes 5000
Pedes Rhynlandicos 6000
Pedes Antverpienſes 6600 $\frac{200}{303}$.

Ex his manifeſtum eſt, milliare Bononienſe eſſe tertiam partem milliaris horarii: hoc enim continet pedum Bononienſium 15, 000, illud 5000.

Cum igitur quantitas tam milliaris horarii, ſive Belgici, quàm Italici Bononienſis, & utriuſque ad invicem proportio ex iis, quæ hìc deduxi perfectè nota ſit, his duobus deinceps ſolis in hoc tractatu, aliiſque utar, ne etiam ipſe in eum errorem incidam, quem ſæpè fui in multis ſcriptoribus averſatus, qui dum menſuras, quas adhibent non exponunt, adeoque ignotas relinquunt, omnia pariter, quæ iis metiuntur, ignota relinquunt.

CA-

Digitized by Google

CAPUT II.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

SInus, Tangentes, secantes sunt rectæ quædam lineæ, quarum in Analysi triangulorum, in Geometriâ Practicâ, in Astronomiâ, aliisque usus est maximus.

Sinuum Definitiones.

Esto quadrans circuli A C E, cujus circumferentia C E divisa sit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & singuli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, sic ut totus arcus C E divisus sit in partes æquales, seu minuta 5400. Ex centro A ad singulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam designo litteris A F. Constituentur hoc facto anguli 5400, quibus subtenduntur arcus totidem uno sese invicem minuto excedentes. Ex his unum designo litteris C A F. Primus angulus erit minuti unius, secundus duorum minutorum, & sic porrò; sexagesimus minutorum 60, hoc est Gradus unius, & sic deinceps; postremus E A C est Graduum 90, adeóque rectus. Tandem per minuta singula ducantur rectæ ad semidiametrum A C perpendiculares, quæ proinde etiam ipsæ numero erunt 5400, computando radium A E, quarum unam designo litteris F X. Hæ appellantur Sinus arcuum, & angulorum uno minuto sese mutuò superantium. *Fig. 1.*

1. Igitur

Digitized by Google

1. Igitur arcu
ab ipſo ſubtenſ
termino arcus

2. Pars rad
intercepta eſt
& anguli F

3. Sinus
arcus F C
illius arcu
complet
nempè F
rectum

4. Sin

5.
habet
qui c
gulus
F X
eo

Fig. 2.

B
ſi

Definitiones Tangentium, & Secantium.

Esto circulus BXZ, cujus quadrans BX intelligatur, ut supra, divisus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A, ad contactum B, ducatur radius AB, qui (a) cum tangente constituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus singulos, & minuta ex centro A, emitti rectæ AF, AL&c, quo facto constituentur anguli FAB, LAB &c. ad 5400, ut supra, quibus subtenduntur totidem arcus BC, BO, &c. *Fig. 3.* *(a) Per 18. lib. 3.*

7. Arcus igitur BC, & anguli BAF tangens est recta BF, secans verò AF, sinus totus AB: similiter arcus BO, & anguli BAL, tangens est BL, secans AL, & sic deinceps.

8. Arcus quadrante minor BO, & arcus quadrante major ZO cum priore BO faciens semicirculum eamdem habent Tangentem BL, & secantem AOL.

9. In omni triangulo rectangulo FBA respectu acuti anguli FAB tangens est FB ipsi oppositum latus, alterum AB ipsi adjacens est sinus totus, seu radius; hypotenusa verò AF, seu latus recto angulo oppositum est secans. Patet ex *defin.* 8, *& prop.* 16 *lib.* 3, si centro A per B describatur circulus.

Pari modo respectu alterius acuti anguli AFB tangens est AB, sinus totus seu, radius est FB, secans FA. Patet ex *defin.* 8, *& prop.* 16 *lib.* 3, si centro F per B circulum descripseris.

Hypo-

Hypotenusa igitur utriusque acuti secans est, ac proinde cum hi anguli inæquales sun, diversis numeris in tabulis Sinuum hypotenusa exprimitur.

Cæterum notandæ inprimis sunt, ac probè intelligendæ definitiones 6, & 9, ut Sinus, Tangentes, Secantes ad usum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

Invenire Sinus, Tangentes, Secantes est earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut à vera insensibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes divisus, ut in 100000, aut 1000, 0000: tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus singuli Sinus, Tangentes, Secantes contineant: quæ inventio, ut postea ostendam, eò accuratior futura est, quò plures in partes radius circuli divisus assumetur. Hoc Sinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menealus; horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & novissimè Joannes Regiomonanus perfecit, qui ad radium 10000000 Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis supputavit. Denique horum omnium conatus egregios, Clavius noster, Pitiscus, Rheticus, aliique complures illustrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclarè hoc in genere laboratum sit; quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio est, optandum sanè videtur, ut facilior ea studiosis, atque expeditior, si fieri potest, efficia-

Digitized by Google

efficiatur. Quare animus mihi est artificium quàm utile, tam pulchrum, & clariùs, quàm cæteri fecerint, & breviùs exponere. Rem omnem tribus Porismatis, & 6 Problematis absolvam. Sit ergo.

PORISMA I.

Dato sinu (FC) cujusvis arcus (FB), complementi sinum (FO) invenire. Fig. 4.

DUcto radio AF, quadratum AF (a) æquatur quadratis FC, AC. Quare si ex quadrato radii, seu sinus totius auferas quadratum sinus dati FC, remanet quadratum AC, hoc est quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO sinum complementi quæsitum.

(a) lib. 1. Per 47.

PORISMA II.

Dato sinu (CF) cujusvis arcus (IC) sinum semisseos ejusdem arcus invenire. Fig. 5.

ARcui IC subtende rectam IC, ad quam è centro perpendicularis fit AL, quæ tam (b) rectam IC, quàm (c) arcum ILC bisecabit; ac proinde IO, est sinus arcus LI semisseos arcus ILC.

Ex sinu dato CF, per præced. inveniatur sinus complementi CQ, seu FA, quo ablato ex sinu toto AI, nota fit FI. Nota igitur est summa quadratorum IF, CF, hoc est, (d) qua-

(b) 3. lib. 3.
(c) 30. lib. 3.
(d) 47. lib. 1.

quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata, dabit ea rectam IC, ejusque semissis sinum quæsitum IO.

PORISMA III.

Fig.6.

Datis sinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB), quorum differentia non sit major 45 minutis, sinum (IS) arcus cujusdam medii invenire.

DUcatur perpendicularis FOQ: erunt LQ, IO, differentiæ sinuum LX, IS ad sinum FR. Et quia arcus LF est non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF sensibiliter à rectis lineis; ac proinde LFQ, IFO assumi possunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO est parallela LQ erit (k)

(k) coroll. 1. prop. 4. lib. 6.

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF.	ad arcus medij, & minimi differentiam IF
ita sinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ	ad sinus medij, & minimi differentiam IO.

Quare cum hujus analogiæ tres primi termini sint noti, etiam quartus IO innotescet. Quem si addamus sinui dato minori FR, notus erit medius quæsitus IS.

Lem-

Digitized by Google

menta: complementum arcus totius grad. 45, quia ipsi æquale, tanquam inutile omittitur.

ex semissibus 22. 30': 11. 15'.
Complementa 67. 30': 78. 45'.

Horum complementorum sinus reperiuntur per Porif. 1. Rursum ex his complementis sumantur semisses semissium, quoties possunt: tum complementa semissium, donec complementum occurrerit, quod bisecari nequeat.

Ex compl. 67. 30': 78. 45'.
Semiss. 33. 45'. nulla.
Compl. 56. 15'.
Semiss. nulla.

Complementa postrema erant grad. 67. 30', & grad. 78. 45': ex posteriori, quia bisecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempè grad. 67. 30' semissis est grad. 33. 45', cujus sinus per Porif. 2 obtinetur. Hujus complementum est grad. 56. 15', cujus sinus reperitur per Porif. 1. Quia verò complementum hoc ultimum non potest bisecari, hic terminus erit inveniendi ex sinu graduum 45.

Igitur ex Sinu graduum 45 inventi jam sunt sinus septem, quorum inventionis series in tabella apposita exhibetur.

	grad.	'	grad.	'	grad.	'	grad.	'
	90	0	45	0				
Semiss.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiss.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex ſinu graduum 60 inveniuntur ſinus 16.

Arcus 60 graduum biſecetur quoties poteſt, & accipiantur ſemiſſium complementa, quæ iterùm biſeca quoties potes: tum ſemiſſium rurſum accipe complementa, quæ denuò biſeca, & biſectionis complementum aſſume. Ex hac alterna acceptione, quæ ſexies repetita eſt; habentur arcus 16, quorum ſinus, per Poriſ. 2, & 1 alternatim accepta, invenientur.

Sinus grad 60 ejuſque Semiſſes	Complementa	Semiſſes Complementorũ	Compl.	Semiſſes	Compl.
grad. '.	grad. '.	grad. '.	grad. '.	grad. '.	grad. '.
60 0					
30 0					
15. 0	75. 0	{ 37. 30 18 45	52. 30 72. 15	26. 15	63. 45
7. 30	82. 30	41 15	48. 45		
3. 45	86 15				

Alternam ſemiſſium, & complementorum ſeriem exhibet tabella hìc appoſita. Atque ita, ſi hactenùs inventi ſinus ordinentur, adnumerato ſinu toto grad. 90, habebimus 24 ſinus arcuum ſeſe gradibus 3, 4'5 ſuperantium.

Ex Sinu graduum 36 habentur Sinus 32.

Si enim arcus grad. 36 accipiatur ſemiſſis, & ſe-

Digitized by Google

& semissis semisseos, & sic deinceps: deinde ipsius sinus 36, & omnium semissium complementa, ac rursum semisses complementorum; eaque alterna semissium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32, quorum sinus per *Porisma* 2, & 1 alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36 arcuum exhibet Tabella pag. seq.



Digitized by Google

Sinus gr. 36. cũ suis Semissibus.	Complementa	Semisses Complementorũ.	Complementa,	Semisses	Compl.	Semisses	Compl.
gradus ′.	grad. ′.	grad. ′.	grad. ′.	grad. ′	grad. ′.	grad. ′	grad. ′.
36. 0	54. 0	27. 0 13. 30 6 45	63. 0 76. 30 83. 15	31. 30 15. 45 38. 15	58. 30 74. 15 51. 45	29. 15	60. 45
18 0	72. 0						
9. 0	81. 0	40 30 20. 15	49. 30 69. 45	24. 45	65. 15		
4. 30	85. 30	42. 45	47. 15				
2. 15	87 45						

Et

Lemma.

Semissis subtensæ (CB) alicujus arcus (CFB) est sinus semisseos ejusdem arcus. *Fig. 7.*

EX centro A ducatur radius A G F ad C B perpendicularis. Erit ergo CG per defin. 1 sinus arcus C F. Atqui per 3 lib. 3 C G est semissis C B, & per 30 lib. 3 C F semissis C F B. Ergo &c.

PROBLEMA I.

Sinum arcus 45 graduum invenire.

QUadrantem C F B subtendat recta C B, ad quam ex centro A sit perpendicularis A G F. Quoniam igitur arcus C B 90 grad. (*a*) bisectus est in F; erit F B arcus graduum 45, cujus sinus est B G. Deinde ergò ob æqualitatem laterum A C, A B, anguli (*b*) quoque A C B, A B C æquales sunt, qui verò ad A rectus; erit (*c*) ergò A B C, seu A B G semirectus. Est autem (*d*) A G B rectus: reliquus ergo BAG (*e*) semirectus est, ideóque par ipsi A B G. Ergo latera B G, AG (*n*) æqualia sunt. Ergo quia quadratum AB æquatur (*f*) utrique quadrato B G, A G, unius quadrati B G duplum erit. Semissis ergo quadrati sinus totius A B, æquatur quadrato sinus 45 graduum B G. *Fig. 7.* (a) 30. *li.* 1. (b) 5. *lib.* 1. (c) *coroll.* 11. *prop.* 32. *lib.* 1. (d) *hyp.* (e) 32. *li.* 1. n 6. *lib.* 1. (f) 47. *li.* 1.

Quare si ex semisse quadrati sinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea sinum 45 grad., qui, quarum partium sinus totus ponitur

 10000000,

10000000, reperietur earumdem esse 7071068 ferè.

PROBLEMA II.

Arcuum 60, & 30 graduum sinus invenire.

Fig. 8.

ESto quadrans B C; arcus B F graduum 60, & sinus ejus D F. Erit ergo arcus F C graduum 30, cujus sinus sit F G. Ducatur autem BF, & ex centro A F. Quoniam arcus B F est grad. 60, hoc est sexta pars circumferentiæ circuli, erit B F latus hexagoni, ideóque (*a*) æquale radio A F. Anguli ( ) igitur ad A, & B in triangulo A F B æquales sunt. Cum igitur in triangulis X, Z æquales sint anguli F B D, F A D, item anguli F D B, F D A, utpote recti; latus verò F D commune; erunt (*b*) quoque latera B D, A D æqualia, ac proinde quadratum B D est quarta pars quadrati sinus totius AB, seu FB: sed quadratum FB æquatur (*c*) quadratis B D, F D; auferatur ergò quarta pars quadrati sinus totius, sive quadratum semisseos BD sinus totius, à quadrato sinus totius F B; remanebit quadratum F D, cujus radix quadrata dabit rectam F D, sinum 60 graduum. Posito igitur sinu toto 10000000 sinus grad. 60 est 8660254.

(a) *Coroll.* 1.*p*.15 *l*.4.
(a)6.*lib*.1.
(b)26.*li*.1.
(c)47.*li*.1.

Sinus porrò F G grad. 30 *est semissis sinus totius*, utpotè æqualis ipsi DA. Idem patet ex lemmate. Posito igitur sinu toto 10000000, sinus grad. 30 est 5000000.

Digitized by Google

PROBLEMA III.

Sinum 36 graduum invenire. *Fig. 9.*

ESto ſemicirculus FBG, cujus baſi radius AB rectus inſiſtat. Tum radio AG biſecto in D, ducatur recta DB, quæ transferatur ex D in C. Recta BC erit (*a*) latus pentagoni circulo inſcripti. (a) *Ptolom. lib. 1. Almag.*

Ex ſummâ quadratorum AB radii, ſive ſinus totius, & AD ſemiſſeos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea (*b*) rectam DB, hoc eſt DC. Ex DC aufer DA ſemiſſem radii; fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB; notum fiet (*c*) quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni ſubtendens gradus 72; illius ergo ſemiſſis (*d*) dabit ſinum 36 graduum. (b) *47. li. 1.* (c) *47. li. 1.* (d) *Lem.*

Poſito ſinu toto 10000000, ſinus grad. 36 reperitur partium 5877852.

Corollarium.

Ex ſinu grad. 36 reperitur (*e*) ſinus complementi, nempè grad. 54 partium 8090170. (e) *Poriſ. 1.*

PROBLEMA IV.

Sinum graduum 12 invenire.

IN quadrante CB ſit arcus BF graduum 30, *K*B grad. 54, & eorum ſinus DF, G*K*. Igitur erit eorum differentia *K*F grad. 24, complementa verò erunt FC grad. 60, *K*C *Fig. 10.*

 grad.

Digitized by Google

grad. 36, quorum sinus sint PF, NK.

Sinus NK, grad. 36 inventus per probl. 3 auferatur ex sinu PF grad. 60 invento per Probl. 2, remanebit OF nota. Tum sinus FD grad. 30 inventus per Probl. 2 dematur ex sinu KG grad. 54 invento per Coroll. præc. remanebit OK nota. Radix summæ quadratorum OF, OK dabit (a) KF subtensam 24 grad. Illius verò semissis dabit (b) sinum graduum 12.

(a) 47 li. 1.
(b) Lem.

PROBLEMA V.

Sinus omnium arcuum quadrantis sese ordinatim uno minuto superantium invenire.

EX quatuor sinibus per præcedentia quatuor Problemata, graduum videlicet 45, 60, 36, 12, reliquos sinus omnes adminiculo trium Porismatum præmissorum inveniemus hunc in modum.

Ex sinu grad. 45 inveniuntur sinus septem.

Problemate 1 inventus est sinus arcus grad. 45: sumatur graduum 45 semissis grad. 22. 30', & semissis horum grad. 11. 15', quæ amplius bisecari nequit. Sinus harum semissium reperiuntur per Porisma 2, nimirùm ex sinu grad. 45 reperitur sinus grad. 22. 30', & ex hoc sinus grad. 11. 15'.

ex 45 gradibus.
Semissis 22. 30'; 11. 15'.

Accipiantur deinde harum semissium complementa

Digitized by Google

Habent igitur studiosi, quod supra promiseram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tribus porismatis, & problematis sex comprehensam. Scio, plures alias esse sinuum reperiendorum vias: sed ea, quam proposui, cæteris explicatu, ac demonstratu mihi est visa facilior.

PROBLEMA VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

REpræsentet PB arcum unius Minuti, seu 60 secundorum, KB verò arcum 26 secundorum exem.gr: Sinus verò istorum arcuum sint PM, KN. Quoniam hi arcus insensibiliter differunt à rectis lineis, assumi possunt triangula PBM, KBN tanquam rectilinea. Igitur per 4 *lib.* 6. *Fig.* 4.

ut PB 1 Min, seu 60 secundorum	ad KB 26 secund.
Ita PM Sinus 1 Min.	ad KN Sinum 26 sec.

Quarè per regulam trium reperietur Sinus KN 26 secundorum, multiplicando videlicet secundum (26″) per tertium, nempè per 2909, Sinum 1 minuti; & productum dividendo per primum, nempè 60 sec.

Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi $49\frac{29}{85}$, posito Sinu toto 10000000, licebitque eâdem methodo reperire Sinum unius tertii, & sic in infinitum.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VIII.

Invenire Sinum arcus, qui præter Gradus, & minuta prima, etiam secunda contineat.

Fig. 6. INveniendus sit exem. gr. Sinus Graduum 36. 20'. 16". Arcum Grad. 36. 20' proximè minorem dato repræsentet FB: arcum verò dato proximè majorem nempè Grad. 36. 21' referat LB. Arcum datum Grad. 36. 20'. 16", qui inter hos medius est, referat IB. Sinus autèm horum trium arcuum sint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF est 1', seu 60"; arcus IF 16"; LQ differentia Sinuum LX Grad. 36. 21', & FR Grad. 36. 20'. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1', insensibiliter differt à rectâ lineâ, & multò adhuc minùs arcus IF 16", erit per *prop. 4 lib. 6.*

ut LF	ad IF,	ita LQ differ.	ad IO differ.
60"	16"	Sinuum, &c.	Sinus &c.

Quare cum tres primi termini sint noti, etiam innotescet quartus differentia IO, quæ addita FR Sinui Grad. 36. 20' dabit Sinum quæsitum IS Grad. 36. 20'. 16".

PROBLEMA IX.

Dato Sinui arcum assignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adscriptum: si non

Digitized by Google

si non reperies, quære eo proximè & majorem, & minorem, quos referat L X, F R; datum verò repræsentet I S. Ductâ perpendiculari FOQ, erit per 4. *lib.* 6. *Fig.* 6.

Ut L Q excessus Sinus LX proximè majoris dato, suprà minorem F R. ad I O excessum Sinus dati I S, suprà minorem F R.

ita Arcus L F 60 secund. ad numerum secundorum, quæ debentur arcui I F.

Quare cum tria prima sint nota, etiam quartum innotescet, numerus nempè secundorum debitus arcui I F, qui additus Gradibus, ac minutis arcus noti F B dabit arcum debitum Sinui dato I S.

Atque hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum est, ut quædam ad plenum hujus rei Theoriam facientia sequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæstio est, cur radius circuli in tot partes divisus assumatur.

Ut hujus assumpti causa intelligatur, meminisse

Digitized by Google

minisse debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas esse vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 *Sinus arcuum se invicem* 45 *minutis superantium per extractionem radicis reperti sunt, ut patet ex* Problem. 1, 2, 3, 4, 5. *Cæteri verò omnes inter hos medij ex illis* 120 *per proportionis regulam innotuere, ut ex* Problematis 5 *postremâ parte constat. Tangentes autem, & Secantes ex Sinibus jam notis per eamdem regulam reperta sunt, quemadmodum* Problem. 6 *ostensum est. Jam verò numeri, è quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm sunt non quadrati, ex quibus si radicem educas, ea semper à verâ, quæ (ut* lib. 3. Arith. cap. 6. *demonstravi) impossibilis est, differet excessu, defectuve aliquo, minore tamen, quàm sit unitas. Hæc porrò differentia, quæ ob fractionum in supputando molestiam negligitur, eò minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, è quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eò major, quò radius in partes plures divisus assumetur. Exemplum statuamus in Sinu* 45 *graduum, quem* Probl. 1 *docuimus obtineri, si ex semisse quadrati Sinus totius radicem extraxeris. Si numerus radij, seu Sinus totius assumatur magnus, qualis hic est* 10000000, *illius etiam quadratus, adeoque & quadrati semissis* 50000000000000 *multò erit major. Porrò radix integra, quæ elici potest ex* 50000000000000 *est* 7071067, *quæ quia ex maximo numero elicita est, etiam ipsa magnus est numerus. Unde fit, ut ipsius à radice verâ impossibili defectus, qui semper unitate minor est, ad ipsam proportionem habeat insensibilem, proin-*

Ex Sinu 12 graduum inveniuntur Sinus 64

Hunc in modum. Ex ſinu 12 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic porrò: tum ipſius ſinus 12, & omnium ſemiſſium complementa ſumantur, dein ſemiſſes complementorum, ac rurſus ſemiſſium complementa &c. Hæc alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio ſi duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum ſinus invenientur per *Poriſma* 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet Tabella hìc adjecta.



Sinus

Sinus Grad 12 utique Semiss	Complementa	Semiss. Complementorum	Complementa	Semiss.	Complementa	Semiss	Complementa	Semiss	Complementa	Semiss	Complementa
Grad. '	Grad. '	Grad '	Grad. '	Grad. '	Grad '	Grad '	Grad '	Grad. '	Grad. '	Grad. '	Grad. '
		39 0	51 0	25 30	64 30	32 15	57 45				
12 0	78 0	19 30	70 30	12 45	77 15						
		9 45	80 15	35 15	54 45						
6 0	84 0	42 0	48 0	24 0	66 0	33 0	57 0	28 30	61 30	30 45	59 15
		21 0	69 0	34 30	55 30	16 30	73 30	14 15	75 45		
		10 30	79 30	17 15	72 45	8 15	81 45	36 45	53 15		
		5 15	84 45	39 45	50 15	27 45	62 15				
3 0	87 0	43 30	46 30	23 15	66 45						
		21 45	68 15								
1 30	88 30	44 15	45 45								
0 45	89 15										

Quod si Sinus omnes hactenùs inventos, sinu toto adnumerato, simul in ordinem redigamus, sinus habebimus 120 arcuum sese mutuò 45 minutis superantium, quorum primus est 45 minutorum, ultimus Grad. 90.

Grad.	'.	Grad	'	Grad.	'.	Grad.	'.
0	0	3.	0	6.	0	9.	0
0	45	3.	45	6.	45	9.	45
1	30	4	30	7.	30	&c.	&c.
2	15	5.	15	8	15	90.	0.

Ex his 120 *Sinibus*

Reliquos intermedios ope tertij porismatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primò quæremus inter singulos horum 120 sinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur sinus arcuum 358 minutis 15 invicem excedentium.

Deinde inter singulos jam inventos duo quærentur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358, proveniunt sinus arcuum 1076, se minutis 5 superantium.

Denique inter illos singulos quæremus medios quatuor arcuum uno se minuto excedentium, quos si addamus illis 1076, habentur sinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno se minuto superantium.

PROB-

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

Secantes, & Tangentes quascumque invenire.

Fig. 5. EX Sinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innotescent.

Arcus cujuscumque B S, exempli gratia 70. 15' Secans esto AR, Tangens BR, Sinus totus A B. Oporteat Secantem A R invenire. Duc S *K* Sinum arcus S B, & S N Sinum complementi S X. Per *prop.* 4. *lib.* 6. ut A *K*, (seu N S) est ad A S, ita A B, seu A S est ad A R. Sunt ergo tres proportionales.

NS	AB	AR
Sinus compl. arcus dati Gr. 70 15'	Sinus totus. 10000000.	Secans quæsita.

Quare si quadratum Sinus totius dividatur per N S Sinum complementi arcus dati, quotiens dabit Secantem quæsitam A R, ut patet *ex* 18 *lib.* 9.

Oporteat deinde dati cujuscumque arcus B S Tangentem reperire B R. Per *prop.* 4 *li.*. 6 ut A*K* (seu N S) est ad *K*S, ita A B ad B R. Sunt ergo proportionales.

NS	*K*S	AB	BR
Sinus Compl. arcus dati,	Sinus arcus dati,	Sinus totus 10000000,	Tangens quæsita

Quare cum tres primi termini sint noti, per *Regulam trium* innotescet quartus.

Habent

proindeque tutò, & absque sensibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob causam tantus numerus partium Sinus totius assumi debet. Verùm, ut hujus rei causa manifestior evadat, omnia errorum capita exactiùs erunt colligenda. Primum caput erroris est in Sinibus illis primis 120, quos reperire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam proport. eliciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo insunt errores proprii, videlicet quod in triangulis LFQ, IFO (vide Fig. 6) *arcus* LF 45', *& arcus* IF 15', *aut* 5' *assumantur tanquam rectæ lineæ; atque insuper cum regula proportionum exercetur, quòd fractio ex divisione residua negligatur. Quo vitio postremo etiam Tangentes, & secantes, quæ omnes ex Sinibus per proport. reg. obtinentur, laborent necesse est. Denique cum Sinus perpauci tantùm immediatè reperiantur, cæteri verò Sinus omnes deducantur ex invicem, ex Sinibus autem Tangentes, & Secantes; manifestum est, singulos, præter errores sibi proprios, contrahere etiam vitia eorum è quibus ipsi derivantur: unde fit, ut error, qui in Sinu immediatè invento simplex erat, in secundo quasi duplicetur, in tertio triplicetur, & sic deinceps. Unde consequens est, eos Sinus esse accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactissimos verò eos esse, qui immediatè, hoc est ex aliis nullis inventi sunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur: qui ne essent notabiles, sed quodammodo evanescerent, radium maximo partium numero divisum assumere oportuit. Et quamvis de-*

Digitized by Google

fectus illi sint non unus, sed (ut jam ostendi) plures, tamen quòd singuli nullius ferè momenti sunt, etiam simul juncti errorem vix sensibilem inducunt, si assumatur Sinus totus partium admodum multarum. Qua enim proportione augetur numerus radii, eâdem crescunt numeri sinuum; ac proinde errores, qui in iis supputandis committi debent, magis evanescunt.

Deinde istud etiam tyrones intelligant, si Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad Sinum totum 10,000000, *quales passim in tabulis reperiuntur, abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium* 100000, *totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. posito radio* 10,000000 *Sinus* 8 *Grad. est* 1391731; *si cupiam minorem ad radium* 100000, *omissis duabus primis notis, is erit* 13917. *Talis enim Sinus, Tangentis, Secantis differentia à majori solùm erit fractio, cujus numerator sint notæ abjectæ, denominator verò Sinus totus duabus cyfris mulctatus. Itaque Sinus* 8 *Grad.* 13917 *mincris a majori* 1391731, *differentia erit* $\frac{31}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex naturâ logisticæ decimalis, quam exposui* Arithm. Practicæ lib. 2. cap. 9, & seq. *præsertim* ex theor. 1, & 2 cap. 10.

Postremò hoc inprimis hìc observabitur, cum Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur respectu radii ex. gr. 100000, *exactiores fore eas lineas, si supputentur, respectu Sinus* 10,000000 *datum excedentis duabus cyfris, & ab iis ita supputatis totidem primæ notæ, uti jam dictum est, abjiciantur. Ratio est, quia errores Sinuum multis notis constantium non versantur*

nisi

nisi in primis notis. Ita Regiomontanus, cum Sinus cuperet ad partes radii 600000, assumpsit radium 60000,000000, & à Sinibus ad eum radium supputatis primas quatuor notas sustulit. Similiter Rheticus, ut haberet Sinus ad radium 10000,000000, assumpsit radium 1000,000000,000000, & à Sinibus per hunc repertis præscidit quinque totas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ residuæ omnes veræ existant, ac proinde Sinus ita reperti a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, sive Canone assumitur. Et tales sunt ii omnes, qui in tabulis passim descripti sunt.

CAPUT III.

Triangulorum rectilineorum Analysis.

TRiangulum omne, quod per se manifestum est, tria latera habet, & angulos tres, quæ simul juncta senarium numerum efficiunt. Ex his tria semper nota sint oportet, ut tria reliqua, quæ sunt ignota, cognoscantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, sive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analysis Triangulorum*, ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, seu præstantius, seu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminùs perspiciant, non ea solùm triangula contemplari debent, quæ in chartâ, vel tabulâ delineantur, sed ab his cogitationes suas transferre ad ea oportet, quæ in campis atque in aere, imò & in ipso cœlo per radios visuales, & ipsas rerum distantias, longitudinesque describuntur.

Opportunum erit ex iis, quæ postea erunt uberiùs explananda, exemplum unum alterumve quasi ad rei totius specimen aliquod, afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum; qui dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta sint, invenire possint.

Fig. 11. Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta Q F, distantiam verò oculi ab eâdem rectâ A Q horizontalis, cum qua rectum angulum constituit altitudo FQ; radium visualem extensum à turris apice F ad oculum in A repræsentet recta F A. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere descriptum, cujus unum latus est A Q distantia oculi à turre, alterum Q F ipsa turris altitudo; tertium radius visualis A F. In hoc triangulo angulus Q A F (ut suo loco ostendam) fit notus instrumento; latus A Q distantia jam supponatur nota. Ex his duobus cognitis, angulo videlicet acuto Q A F, & distantiâ A Q, per universale Problema jam dictum invenietur quanta sit altitudo turris QF. Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam istud occurret: datis in triangulo quolibet duobus angulis quæ sit laterum inter se proportio, invenire.

Fig. 12. Ex hoc Problemate ad distantiam Lunæ à Terrâ dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ esto C; centrum Terræ A; oculus in superficie Terræ in B; semidiameter orbis Terræ A B. Cogitentur tam ex Terræ centro A, quàm ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto constituitur triangulum à Ter-

Digitized by Google

à Terrâ ad Lunam pertingens, cujus unum latus est semidiameter Terræ AB, reliqua duo sunt distantiæ tam centri Terræ, quàm ipsius oculi à centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB Astronomico artificio innotescit: angulus verò ABC fit notus per instrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis, per universale problema jam dictum, innotescet, quæ sit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc est quoties distantia Lunæ à Terrâ semidiametrum Terræ contineat: ac proinde, cum alio jam artificio quot milliaria radius Terræ contineat, innotuerit, ipsa etiam distantia Lunæ à Terrâ in milliaribus innotescet. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujusmodi, quod Tyro fortè aliquis nullius esse usus judicasset. Hæc ergo dicta sint in gratiam eorum, quibus illud in ore semper: cui usui, ut ex his etiam cætera, quorum usum non perspiciunt, æstimare discant.

Annotationes quædam pro tyronibus.

Priusquam ultrà tendamus, expediet hìc in memoriam revocare nonnulla, quæ in elementis traduntur, in quibus sub hæc initia hærere plerumque Tyrones solent. Prætereant ista, qui his non indigent.

1. Datum, & notum idem significant in hac materiâ.

2. Circumferentiam circuli partiri solent Mathematici in partes æquales 360, quas Gradus appellant, & harum singulas rursus in 60 æquales, quas Minuta vocant.

3. Arcus circuli, seu pars circumferentiæ

Digitized by Google

nota dicitur, cum ſcitur, quot gradus contineat; tunc enim arcus ille quanta ſit totius circumferentiæ pars innoteſcit.

Fig. 13. 4. Angulorum menſuræ ſunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tamquam centro inter ejus crura deſcribuntur. Sic anguli C menſura eſt arcus OQ centro C deſcriptus inter anguli crura AC, BC. Patet ex ultima *lib.* 6. Hac de cauſâ angulus C dicitur eſſe tot graduum, quot graduum eſt ille arcus OQ ut ſi arcus OQ eſt grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5. Angulus ille C dari ſeu notus eſſe dicitur, quando ſcitur, quot graduum ſit; hoc eſt quot graduum ſit arcus OQ inter ejus crura ex vertice, ut centro deſcriptus.

6. Angulus rectus dicitur 90 grad., quia arcus inter ejus latera centro vertice deſcriptus eſt 90 grad., ſeu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180, quia arcus inter eorum crura deſcriptus, eoſque ſubtendens eſt grad. 180, ſemiſſis nempè circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia ſubtenduntur à totà circumferentià.

Fig. 14. 7. Si ex anguli vertice, ut centro inter ejus latera plures deſcribantur arcus OQ, SV; minor æquè eſt menſura anguli, ac major; quia minor æquè magna pars eſt ſuæ circumferentiæ totius, ac major ſuæ: ac proinde, ſi arcus major OQ eſt ex gr. 32 graduum, quorum tota circumferentia major OQLH eſt 360, etiam minor arcus SV eſt graduum 32, quorum minor circumferentia SVRT eſt 360. Pa-

tet

tet ex *Coroll.* 3. *prop.* 33. *lib.* 6.

8. Cujuscumque trianguli tres anguli simul sumpti efficiunt gradus 180: quia per 32 *lib.* 1. tres illi anguli simul sumpti semper efficiunt duos rectos; ac proinde, si ex angulorum verticibus A, B, C tamquam centris inter trianguli cujusvis crura describantur eodem intervallo circini, tres arcus FG, XZ, OQ hi simul sumpti semper conflabunt semicirculum, hoc est arcum 180 graduum. Nam si centro C perficiatur semicirculus O Q P, & arcus F G transcribatur ex Q in L, tertius arcus XZ æqualis erit residuo L P, adeoque tres simul arcus O Q, F G, X Z conficiunt integrum semicirculum O Q L P. *Fig.* 13.

9. Cum in triangulo ABC quocumque noti sunt duo anguli (A grad. 125, B grad. 34) etiam C tertius innotescit, si utriusque dati gradus 159 subtrahantur à 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 *lib.* 1. Atque hac de causâ datis duobus angulis, etiam tertius dicitur esse datus.

10. Pari ratione, si in quovis triangulo ABC notus sit unus angulus (B grad. 39) innotescit etiam summa reliquorum C, A, si gradus anguli noti (B Grad. 39) subtrahantur à 180 gradibus; remanent enim gradus 141 summæ duorum reliquorum C, A. Patet ex annotat. 8, & 32 *lib.* 1, & hac de causâ dato uno angulo, dicitur & summa reliquorum dari. *Fig.* 15.

11. In triangulo rectangulo B A C dato acuto uno (C grad. 31) etiam acutus alter B innotescet, si acuti dati (C grad. (31) subtrahantur à gradibus 90, remanent enim grad. *Fig.* 16.

59 pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. *lib.* 1. Et hac de causâ in triangulo rectangulo, cum datur acutus unus, dari dicitur etiam alter.

12. Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cum primus A est ad secundum B, ut tertius C ad quartum Z.

ut A ad B
ita C ad Z

13. Termini noti sunt, qui numeris exprimuntur; hoc est quando scitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14. Cum è quatuor proportionalibus tres termini sunt noti, quartus verò incognitus; is semper innotescet, si secundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum; quotiens enim divisionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc est ea Regula, quæ vulgò Proportionum, sive Trium, & ob summam utilitatem Aurea appellatur. Demonstrata est *prop.* 19. *lib.* 9, de quâ vide plura *lib.* 4. *Arithm. cap.* 1.

Dato angulo, datur ex tabulis sinus ejusdem; & dato sinu, datur angulus: ut si detur angulus grad. 40. 16'; gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columnâ primâ ad lævam. His adscriptum reperies, non solùm Sinum illis debitum 6463460, sed etiam Tangentem 8470620, & Secantem 13105396. Contra si detur Sinus ex. gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columnâ Sinuum numerum datum; vel si non reperiatur, ei proximè æqualem: in columnâ primâ ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæsiti.

Deni-

Denique hoc obſerva: in Analyſi trianguli rectanguli, quamvis ſolùm duo data exprimantur, ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto: tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui quia per ſe notus eſt, & triangulo rectangulo nominato ſatis ſubintelligitur, ulteriùs exprimi non ſolet.



ANA-

Digitized by Google

ANALYSIS

TRIANGULI RECTANGULI

PROBLEMA I.

Datis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.

Fig. 15. BAsi AC adſcribe Sinum totum: lateri A B Sinum oppoſiti anguli C: lateri C B Sinum anguli oppoſiti A. Eadem erit laterum proportio, quæ Sinuum.

Demonſtratio patet ex defin. 6. *cap.* 2. Itaque ſi cupiam ſcire, quanto latus unum ſit altero majus, ex.gr. AC, quàm B C: Sinum 10000000 divide per Sinum 5150381. Quotiens $1\frac{4849619}{10000000}$ hoc indicabit: ſicut enim quotiens eſt ad 1, ita A C eſt ad B C.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta B C, adſcribe Sinum totum; lateri B A Tangentem acuti C; baſi A C Secantem ejuſdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex defin. 9. *cap.* 2.

PROBLEMA II.

Datis baſi (B C pedum 100), & acuto uno (B Grad. 59), reliqua latera A C, AB invenire.

Fig. 16. IN triangulo rectangulo hypotenuſa, ſive baſis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera verò, quæ rectum angulum continent,

In-

Digitized by Google

Inventio lateris A C.

Ut data basis B C, prout est Sinus totus 10000000	Ad latus AC, prout est Sinus anguli (B gr. 59) 8571673.
Ita eadem basis B C prout est pedum 100	Ad ejusdem lateris AC pedes quæsitos .....

In quo analogismo, quia tres primi termini sunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempè pedum lateri AC debitorum innotescet per regulam proportionum, multiplicando videlicet secundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10,000000, quotiens enim $85\frac{7167300}{10000000}$ ex eâ divisione proveniens est, quartus qui latebat; numerus pedum scilicet, quos continet latus quæsitum A C.

Non absimilis est inventio lateris AB; nam quia datur acutus B (graduum 59) etiam per 32 *lib.* 1. seu annotat. 11, datur acutus alter C (graduum 31) unde etiam Sinus utriusque dantur. Jam,

Ut basis B C, prout est Sinus totus 10000000	AD latus ignotum AB, prout est Sinus anguli gr. 31 5150381;
Ita basis BC, prout est pedum 100	Ad lateris ignoti AB pedes quæsitos .....

Cum ergo tria prima sint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri AB debitorum per regulam Trium innotescet.

Demon-

Demonstratio.

Hoc unum tum hìc, tum ferè etiam in sequentibus erit demonstrandum, quatuor supradictos terminos esse proportionales. Id verò ex definitione 6 *c.* 2 manifestum est. Nam basis B C, latus nempè recto angulo A oppositum est Sinus totus, seu radius; latus verò A C est Sinus anguli oppositi B, ex. gr. 59 graduum, qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium Sinus totus, nempè basis B C, est 10000000, earum Sinus anguli B, nempè latus A C, est 8571673: ac proinde, ut basis BC, prout est Sinus totus 10000000, est ad A C 8571673 Sinum anguli B; ita eadem basis B C ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæsitum, sive ad numerum pedum in latere A C contentorum. *Q. E. D.*

Pari modò per defin. 6 BC est Sinus totus 10000000, & BA Sinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381. Ergo ut BC Sinus totus 10000000 ad BA Sinum 5150381; ita eadem BC ex hyp. 100 pedes ad eamdem BA incognito pedum numero constantem. *Q. E. D.*

NOTA.

Fundamentum hujus, & omnium sequentium operationum, ac demonstrationum est, quod quando duæ quantitates A & Z notæ sunt secundùm quamvis eamdem mensuram, & una earum A etiam nota est in aliá mensura ex. gr. in pedibus; tunc etiam altera, Z, in pedibus necess-

necessariò innotescit per regulam auream. Vide cap.1. lib.4. Arithm. nostræ, ubi id demonstratum est.

PROBLEMA III.

Datis Latere uno A C milliariorum 1000 & acuto uno, latus reliquum B A & basim B C invenire.

EX uno acuto dato notus fiat alter: ut si B detur grad. 54, his subductis à 90, erit C grad. 36, *Fig. 17.*

Inventio lateris A B.

Ut latus datum AC, prout est Sinus totus 10000000	Ad latus ignotum AB, prout est anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
Ita latus datum A C, prout est milliariorum 1000	Ad lateris ignoti A B milliaria quæsita .....

Inventio basis B C.

Ut latus datum A C, prout est sinus totus 10000000	Ad basim ignotam BC, prout est acuti C dato lateri adjacentis Secans 12360680
Ita latus datum A C, prout est milliariorum 1000	Ad ignotæ BC baseos milliaria quæsita .....

Quare

Digitized by Google

Quare cum in utroque Analogiſmo tria prima ſint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innoteſcet: eritque latus AB milliariorum $726\frac{5426}{10000}$; baſis verò BC milliariorum $123\frac{6068}{10000}$

Demonſtratio.

Per defin. 9. *cap.* 2. latus AB eſt Tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426; latus verò AC eſt Sinus totus 10000000: hoc eſt quarum partium latus AC eſt 10000000, earum eſt AB latus 7265426. Ergo, ut AC 10000000 eſt ad AB 7265426: ita eadem AC ex hyp. 1000 milliari, ad milliaria quæſiti lateris AB, hoc eſt ad numerum milliariorum in AB contentorum. Ergo &c.

Pari modo per defin. 9 *cap.* 2. reſpectu anguli C grad. 36, AC eſt Sinus totus 10000000, & BC ſecans, quæ ex tabulis datur 11360680. Ergo ut AC Sinus totus 10000000 eſt ad BC Secantem 12360680; ita eadem AC ex hyp. 1000 milliari, ad eamdem BC ignotum numerum milliariorum continentem. Ergo &c.

PROBLEMA IV.

Fig. 18. Baſi (CB 1000 perticarum), & uno latere (AC 891 perticarum) datis, invenire acutos angulos, & latus alterum (AB).

Ut baſis data CB perticarum 1000 Ad latus datum AC perticarum 891,

Ita

Ita basis eadem CB, prout est Sinus totus 10000000	Ad anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur Sinum ....

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8610000: huic in tabula invenitur proximè æqualis 8910065, cui adscriptus est angulus grad. 63, qui per probl. 9 *cap.* 2. adhuc reperietur exactiùs. Is ergo est angulus B, qui latebat. Invento autem acuto B, datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam verò jam in triangulo rectangulo nota est basis CB cum angulo C, latus quæsitum BA invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3 in scholio prop. 47. *lib.* 1. *elem.*

Demonstratio.

Per defin. 9. *cap.* 2 CB est Sinus totus 10000000, & CA est Sinus anguli B. Ergo ut basis BC, 1000 pertic. ad latus AC 891 pertic. Ita basis eadem BC, prout est Sinus totus 10000000 ad idem latus AC, prout est Sinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus CA datum pertic. 891	Ad basim CB pertic. 1000
Ita Sinus totus 10000000	Ad Secantem ignoti anguli C datis CB, CA comprehensi.

Demonstratio eadem, sed ex defin. 9. *cap.* 2.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA V.

Fig. 19. Duobus lateribus datis (BA pedum 79, CA pod. 100) acutos angulos, & basim invenire.

Inveniendus sit angulus acutus C.

Ut datum latus AC adjacens quæsito angulo C	Ad alterum latus datum AB;
Ita Sinus totus 10000000	Ad anguli quæsiti C tangentem .....

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000, huic proximè æqualis invenitur in tabulâ 6156615, cui adscriptum reperies angulum 38 graduum, qui *probl.* 9. *cap.* 2. adhuc reperietur exactiùs. Tantus ergo est acutus C, qui latebat, quo ex grad. 90 subtracto, datur & alter B grad. 52.

Quia verò noti jam sunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera, per probl. 2 etiam basis BC fiet nota.

Alia basis inventio ab angulis independens traditur probl. 2 scholii prop. 47 *lib.* 1. *elem.*

Demonstratio.

Per defin. 9. *cap.* 2. respectu anguli C, Sinus totus est CA, Tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA, ex hyp. pedum 79, ita eadem CA, prout est Sinus totus 10000000, ad eamdem BA, ut est Tangens quæsiti anguli C.

ANA-

Digitized by Google

ANALYSIS

TRIANGULI OBLIQUANGULI

TRiangulum, in quo nullus angulus rectus est, obliquangulum voco.

PROBLEMA VI.

Datis omnibus lateribus, lateris segmenta BF, CF facta à perpendiculari A F ex opposito angulo ducta, & ipsam perpendicularem invenire. *Fig. 20. 21.*

CEntro A intervallo lateris minoris AB describatur circulus secans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L. Manifestum est, LC esse summam laterum AC, AB, & OC differentiam eorumdem. Item patet ex prop. 3 *lib.* 3 BQ bisectam esse in F. His ita constitutis, rectangula BCQ, & LCO (*a*) æqualia sunt. Ergo per 14, vel 16 *lib.* 6.

(a) *Coroll. p. 36. l. 5.*

Ut BC latus in quod perpendicularis cadit	Ad LC summam laterum reliquorum BA, AC
Ita OC differentia reliquorum laterum	Ad rectam CQ

Quare cum tria prima sint nota, etiam quartum nempè CQ innotescet, hæc, si perpendicularis intra triangulum cadit (ut in *Fig.* 20) abla-

Digitized by Google

ta à latere noto BC, notam relinquet BQ, cujus semissis BF est segmentum quæsitum minus; quo subtracto à latere BC, etiam majus segmentum CF innotescet.

Quod si perpendicularis cadat extra (ut in *Fig.* 21.) tunc ex quartâ proportionali CQ, subtrahe latus BC, ut innotescat residuum BQ; hujus enim semissis BF dabit segmentum minus: ad quod adjecto latere BC, habetur segmentum majus CF.

Ipsa verò perpendicularis AF fiet nota, si ex quadrato lateris BA adjacentis minori segmento subtrahatur quadratum minoris segmenti BF, & ex residuo extrahatur radix, ea enim erit AF. Patet *ex pag.* 47. *lib.* 1.

Porrò ipsa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intrà triangulum cadat, quando extrà. Cum enim minor est latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cum major extrà.

Hoc problema, quod sanè perinde pulchrum, atque utile est, expeditur etiam per prop. 13 & 12 lib. 2. *ut tradidi in Scholio ibidem: sed modus hìc traditus aliquantò facilior est.*

PROBLEMA VII.

Fig. 22. 23.

Datis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.

IN quovis triangulo eadem est inter latera proportio, quæ inter Sinus angulorum lateribus oppositorum.

Demon-

Demonstratio.

Esto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (aliàs enim res per se esset manifesta) & ex majori CB abscindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia sunt inter se parallelæ, erit (*a*) CI (hoc est AB) ad CB, ut IL ad BF. Sed posito Sinu toto CI, est IL Sinus ( ) anguli C; & posito Sinu toto AB, hoc est eodem quo ante; cum AB, CI æquales sint BF est (*c*) Sinus anguli BAC. Ergo latus AB est ad latus CB, ut Sinus anguli C ad Sinum anguli BAC. Eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonstratio.

(a) *Coroll. 1. p. 4 l. 6.* (b) *defin. 6. cap. 2.* (c) *per eand.*

Tantùm Nota. Cum perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus esse Sinum anguli BAC, quia (*d*) Sinus est anguli BAF, cum quo (*e*) eundem habet Sinum angulus BAC, sive complementum ad duos rectos.

(d) *per eand.* (e) *defin. 5.*

PROBLEMA VIII.

Datis omnibus lateribus, angulos invenire.

Concipiatur in aliquod latus ex opposi[illegible] gulo demissa perpendicularis AF probl. 6 nota fiant segmenta BF, [illegible]

Tum quia in triangulo rectang[illegible] tur BA, & BF: per probl. 4 i[illegible] lus B. Rursum quia in tria[illegible] CFA dantur CA, CF

liter innotescet angulus C: Et per *prop.* 32. *lib.* 1. seu annot. 9. etiam tertius BAC.

PROBLEMA IX.

Fig. 25.

Dato latere AC, & duobus angulis, reliqua latera AB, CB invenire.

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, Sinus 6293204.	Ad anguli C oppositi quæsito lateri AB Sinum 2756374.
Ita latus datum AC 1000 passuum	Ad lateris quæsiti AB passus .....

Rursum per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppositi Sinus 6293204	Ad anguli A oppositi quæsito lateri CB Sinum 8191521
Ita latus datum AC 1000 passuum	Ad lateris quæsiti CB passus .....

In utroque Analogismo tria prima nota sunt. Quartum igitur utrobique, nimirum latera AB, CB innotescent per regulam proportionum.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA X.

Datis duobus lateribus (C A ped. 216, B A ped. 112) & angulo (A grad. 113) iis comprehenso reliquos angulos C, B, & latus reliquum C B invenire.

Quoniam C A, B A latera dantur, etiam datur eorum summa 328 ped., & eorumdem differentia ped. 104. Rursum quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B summa (67 grad.) adeoque & semissis summæ (grad. 33.30') cujus proinde Tangens 6618856 datur ex tabulis. His positis. *Fig. 26.*

Ut laterum datorum CA, BA summa 328 ped.	Ad laterum CA, BA differentiam 104 ped.
Ita Tangens 6618856 semisseos summæ incognitorum ang. C, B	Ad Tangentem ..... semisseos differentiæ ignotorum ang. C, B.

Cum ergo tria prima sint nota, per reg. prop. innotescet quartum, nempè Tangens semisseos differentiæ angulorum ignotorum C, B, ... Huic in columnâ Tangentium proximè reperitur æqualis ....., cui adscripti sunt grad ..... prò angulo semisseos differentiæ angulorum C, B, quam si addas ad semissem summæ Grad. 33 30' angulorum C, B, habetur B major quæsitus; si subtrahas, provenit minor C.

Latus reliquum CB reperitur per *præced*;

Digitized by Google

jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonstratio.

Fig. 27, & 26. Analogismi suprà positi est ejusmodi. Fian anguli HPF, FPG æquales angulis ignoti B, C. Centro P descripto circulo, qui later angulorum secet in H, F, G; ducantur ad F perpendiculares HR, GL, quæ per *defin.* & 6 & 5 erunt Sinus angulorum HPF, FPC posito sinu toto, seu radio, PH, PG. Duc tur deinde recta HOG, & fiat HX p ipsi GO, jungaturque PX. Erit XO d ferentia ipsarum HO, HX; hoc est ip rum HO, OG. Denique ex centro P (

(a) 3. *lib.* 3. catur ad HG perpendicularis PQ, quæ bisecabit HG. Quoniam igitur æquales s HQ, GQ, & HX, GO; etiam XQ, C æquales erunt. Unde QO est semissis differ tiæ XO rectarum HO, OG. Ex quo fa etiam ostenditur, angulum HPQ esse semiss

(b) *const.* summæ angulorum HPO, OPG, hoc est (angulorum B, C; & QPO esse semissem ferentiæ angulorum HPO, OPG; hoc es C. His positis differentia laterum CA, esto Z.

Quia HR est Sinus anguli HPF, hoc e & GL Sinus anguli FPG, hoc est C: erit

(c) *Probl.* 7. (*c*) CA ad latus BA, ut HR Sinus anguli I GL Sinum anguli C; hoc (*d*) est (quia a

(d) 4 *lib.* 6. angula sunt triangula HRO, GLO) ut H

(e) *Coroll.* 2 *p.* 18. *lib.* 5. OG. Ergo CA(*e*) est ad Z differentiam lat CA, BA, ut HO ad ipsarum HO, OG rentiam XO: & invertendo laterum diff tia Z est ad CA, ut differentia XO ad HC

Digitized by Google

qui (ut jam oſtendi) CA eſt ad BA, ut HO ad OG. Igitur(*f*)ex æquo Z differentia laterum eſt ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA eſt ad Z, ut OG ad XO. Quoniam ergo (ut oſtenſum ſuprà) CA eſt ad AB, ut HO ad OG; ac proinde (*g*) componendo ſumma CA, AB eſt ad AB, ut HG ad OG, AB verò (ut jam oſtendi) ſit ad Z, ut OG ad XO; ex æquo (*h*) erit ſumma laterum CA, AB ad Z laterum differentiam, ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, ſic ſemiſſis HG, nempè HQ, quæ (*i*) Tangens eſt anguli HPQ, ad ſemiſſem XO, nempè QO Tangentem (*k*) anguli QPO. Ergo ſumma laterum CA, AB eſt ad Z differentiam laterum, ut HQ Tangens anguli HPQ (qui, ut oſtendi ſuprà, eſt ſemiſſis ſummæ angulorum B, C) ad QO Tangentem anguli QPO, qui eſt ſemiſſis differentiæ angulorum B, C. *Q. E. D.*

(f) *22. lib. 5.*
(g) *18. lib. 5.*
(h) *22. lib. 5.*
(i) *defin. 6. cap 2*
(k) *Ibid.*

Alia Problematis ſolutio.

Fig. 28. 29.

Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppoſitum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cum detur baſis BA, & acutus unus BAF, per *Prob. 2.* invenientur BF, & AF, quâ ſubtractâ ex data CA in *Fig. 28.* additâ verò ad CA in *Fig. 29*, nota fiet etiam CF.

Rurſum ergo in trigono rectangulo CFB cum dentur duo latera BF, CF, per *Probl. 5* innoteſcet BC latus quæſitum, & angulus C, quem unà cum dato A ſubtrahe 180 Grad. (*a*) remanebit B alter quæſitorum.

(a) 32. 1.

Digitized by Google

PROBLEMA XI.

Fig. 30. 31. Datis duobus lateribus A B, C B, & angulo uno C iis non comprehenſo, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire.

Per Probl. 7

Ut AB latus datum dato angulo C oppoſitum	Ad alterum latus datum CB
Ita Sinus anguli dati C	Ad Sinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato C B opponitur.

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum, nempè Sinus anguli ignoti A, innoteſcet, & per Sinum invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit: ſi verò A obtuſus, tunc angulus per Sinum inventus ſubtractus à 180 gradibus relinquet quæſitum A. Ratio patet ex *defin.* 5.

Neceſſe igitur hìc eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliundè nota ſit.

Inventis angulis latus ignotum AC innoteſcet per *Probl.* 9.

Aliter.

Fig. 32. 33. Ex angulo B datis lateribus comprehenſo ducta intelligatur B F perpendicularis ad latus ignotum AC.

In

Digitized by Google

In triangulo rectangulo BFC, cum detur basis BC, & unus acutus C, innotescent per *Prob.2.* CF, & BF. Rursum in trigono rectangulo BFA, cum dentur basis AB, & latus BF, innotescent per *Problema* 4 angulus BAF, & latus FA.

Quod si angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA non comprehenditur, sit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in *Fig.* intra triangulum cadat, angulus BAF jam inventus est ipse BAC quæsitus; & tunc FA jam nota addenda est ad CF ante repertam, ut innotescat totum latus quæsitum AC. *Fig. 32.*

Si verò BAC sit obtusus, adeoque perpendicularis BF, ut in *Fig.* extra triangulum cadat, angulus inventus BAF, subtrahendus est à 180 gradibus, ut innotescat quæsitus BAC; & tunc FA jam nota, demenda ex notâ FC, ut innotescat latus quæsitum AC. *Fig. 33.*

Rursum igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC necesse est, ut aliundè anguli BAC nota sit species.

CAPUT IV.

Fabrica instrumenti mensorii, & Scalæ.

PEr mensorium instrumentum non aliud intelligo, quàm circulum, aut circuli quadrantem ad metiendum debitè præparatum: hoc enim utemur solo, quia cæteris parabilior, usu planior, atque universalior.

Fabri-

Digitized by Google

Fabrica Circuli, & Quadrantis.

Fig. 14. Efformetur lamina ænea circularis exactè plana FOLQ, cujus centrum ſit A. Per id deſcribe binas diametros QO, FL ſeſe perpendiculariter interſecantes, quæ totum circulum dividant in 4 quadrantes, quorum arcus ſingulos QL, LO, OF, FQ, partire in partes æquales 90 hoc ordine: ſeca primo quadrantem in tres arcus æquales per *Coroll. 13. prop. 32. lib. 1.* Tum hos ſingulos in 5 ſubdivide, & habebis arcus 15, quibus iterùm triſectis arcus proveniunt 45, quos ſingulos biſecando, habes quadrantem totum in 90 æquales arcus, ſeu Gradus diviſum. Simili diviſione in tribus reliquis quadrantibus continuatâ, tota circumferentia erit in 360 Gradus ſecta. Solent Aſtronomi, cum patitur inſtrumenti magnitudo, ſingulos Gradus denuò ſubdividere in 60 æquales partes, quæ Minuta appellant: tum ea rurſum ſingula in alia 60, quæ ſecunda minuta vocitant. Ejuſmodi diviſio adhibetur, cum exactiſſima angulorum inventio ad uſus potiſſimùm Aſtronomicos requiritur. Quod ſi per inſtrumenti parvitatem deſignari minuta prima, & ſecunda non poſſint, expediet Gradus ſingulos dividere in partès 6, aut in 3, aut certè in 2. Porrò diviſio ſexagenaria ſic peragitur: primò Gradum divide in partes 5, quas ſingulas triſecando partes efficies 15: has biſecando habes 30, quibus rurſum biſectis provenient 60.

Cum autem ad circumferentiæ diviſionem ex omnibus numeris Mathematici elegerint numeros 360, & 60, cauſa eſt, quod hi numeri

plu-

Digitized by Google

plurimas habeant aliquotas, quod in calculo solet esse percommodum. Numerus 360 aliquotas habet 22.

Partes aliquotæ numeri 360.

2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
180	120	90	72	60	45	40	36	30	24	20

Partes aliquotæ numeri 90.

2	3	5	6	9
45	30	18	15	10

Partes aliquotæ 60.

2	3	4	5	6
30	20	15	12	10

In his seriebus numeri oppositi sese invicem denominant, quales nempe sint partes totius, ex. gr. in primo ordine 45 oppositum sibi habet 8; ac proinde 45 est octava pars 360; 8 autem est 45 pars 360.

Graduum ac minutorum divisione peractâ, si integrum desideras mensorium circulum; ad centrum clavo tereti affige regulam, quæ circa ipsum centrum possit circumagi eâ lege, ut latus regulæ B A C semper transeat per centrum A. Regulæ extremitati affigendæ erunt utrimque dioptræ. Est autem dioptra lamella rectangula (a) RK habens in medio crenam, seu rectam lineam perforatam XZ, vel ejus loco fidem tensam: sed tunc rectangulum dioptræ est patens, sive vacuum. Sunt autem dioptræ (a)Fig.17.

ita

ita regulæ affigendæ, ut crena, seu fides XZ perpendiculariter insistat regulæ lateri BAC, per centrum transeunti: sic enim radius per dioptras trajectus ad oculum secundùm regulæ latus BAC, quod est omninò necessarium, feretur. Denique ad diametri OQ extremum circellus fiat versatilis S, ex quo suspensum instrumentum se libret perfectè, sic ut diameter QO sit horizonti perpendicularis, & FL eidem parallela.

Fig. 37. Si quadrantem circuli desideras, describe in æneâ laminâ exactè planâ rectum angulum BAC, ac centro A inter ejus crura arcum CB, quem partire, ut suprà docui, in 90 gradus, hosque, si fieri potest, singulos in partes 6, aut 3, aut certè in 2. Adjungatur deinde regula, quæ circumagi possit circa centrum A, sic ut ejus latus OA semper per A centrum transeat. Tum utrique lateri AC, AB, & regulæ AO binæ singulis insistant dioptræ, universim nempè sex, quarum crenæ lateribus AC, AB, AO insistant ad quadrantis planum perpendiculares. Contrahi possunt ad tres solùm, si una statuatur ad centrum ita mobilis, ut ejus crena semper centro insistens, maneat ad planum instrumenti recta. Denique ut instrumentum baculo imponi possit, tergo ex oppositâ centri parte tubus affigatur, circa quem moveri & circumagi, prout feret res, instrumentum valeat. Quadrantem sic præparatum Stabilem, sive Firmum appellant, quod in suo usu ferè semper unum eumdemque requirat situm, videlicet perpendicularem unius lateris ad horizontem, ad quod opus, ut perpendiculum ad manum sit, quod uni laterum AB, vel AC applicari possit. Quod

si loco

ſi loco regulæ AO ex centro perpendiculum appenderis AY, reliquis omnibus manentibus, quadrantem habes, quem vocant Mobilem; quòd in uſu ſuo modò attolli debeat, modò deprimi; ac proinde continuò ſitum permutet. Expediet utrumque conjungere, quod fiet ſi ex crenâ dioptræ centralis perpendiculum ſuſpendatur. Tandem dioptræ laterum extremæ B, C æqualiter debent eſſe à centro A remotæ, ut quadrante ex annulo liberè ſuſpenſo, radius per eas ductus horizonti æquidiſtet, hoc enim uſum habet præſtantem, ut in *Probl.* 13. *cap. ſequ.* apparebit.

Artificioſa inventio minutorum, licèt in inſtrumento deſcripta non ſint.

Modum hujus artificii ex Petro Nonio Luſitano proponit Clavius, ſed operoſum nimis, & vix practicabilem. Feliciùs id exequitur Guidus Ubaldus in Problem. Aſtron., & (quod opinor) alii ex illo. *Fig.* 36.

Conſule partes aliquotas numeri 60, & ex iis aliquam, vel ipſum numerum 60 auge unitate. Nos hìc ex. gr. ſumemus 15, partem quartam 60, quæ aucta unitate facit 16. Ex circumferentiâ, in qua minuta deſiderantur, accipe arcum *a* Z graduum tot, quot in numero 60 unitate aucto, aut in parte ejus aliquotâ 15 unitate auctâ, ſunt unitates: hìc ergo *a* Z erit grad. 16. Huic arcui æqualem, & ſimilem deſcribe *lb*, quem divide in partes æquales unà pauciores gradibus arcus *a* Z; hoc eſt vel in 60 partes æquales, aut in tot, quot unitates habet pars aliquota aſſumpta, quæ hìc eſt 15. Ex hac partitione Ma-

Digitized by Google

Manifeſtum eſt 1, unam partem arcus *lb* excedere unum gradum circumferentiæ *ax* minuto toties ſumpto, quoties numerus partium arcus *lb* ingreditur 60: ac proinde, cum in exemplo noſtro arcus *lb* ſit partium 15, qui numerus eſt quarta pars 60, una pars arcus *lb* excedet unum gradum circumferentiæ *ax* minutis 4. Facilis eſt demonſtratio. Nam per conſt. arcus *lb* partium 15 æquatur arcui *az* graduum 16. Ergo 15 partes *lb* excedunt 15 gradus *ar* uno gradu *rz*, hoc eſt 60 minutis. Ergo una pars *lk* excedit unum gradum decimâ quintâ parte 60' minutorum, hoc eſt minutis 4.

Manifeſtum eſt 2, ſi exceſſum unius partis ſuprà unum gradum toties ſumpſeris, quot partes dantur, haberi minuta, quibus partes datæ excedunt totidem gradus. Ut ſi dentur *cb* partes 10, decupla minuta, quibus una pars excedit unum gradum, provenient minuta, quibus *cb* 10 partes excedunt 10 gradus. Patet ex manifeſto primo.

Ex his.

Minuta in circumferentiâ datâ, quamvis in eâ non ſint deſcripta, hunc in modum reperiemus. Ponamus regulam, ſeu perpendiculum, præter gradus integros *af* abſcidiſſe partem gradus *fo*; quæritur quot minuta ſint in *fo*. Arcum *lb* applica circumferentiæ *oa*, ſic ut ejus initium *b* tangat *o*. Vide cujus partis initium conveniat cum initio alicujus gradus. Hic *c* convenit cum *q*. Patet, tot partes eſſe in *cb*, quot gradus in *qf*. Igitur ex manifeſto 2, & 1 ſcie-

1 scietur, quot minutorum sit excessus *fo*, quo partes *cb* excedunt totidem gradus *qf*; ac proinde notum fiet, quot minuta contineat *fo*.

Ita totum hoc artificium habent Tyrones brevissimè & propositum, & demonstratum.

Scalæ constructio.

Scalam voco lineam rectam in partes sectam progressionis decuplæ. Usum habet insignem non solùm in hac materiâ, sed in aliis etiam quàmplurimis. *Fig.* 35.

Ex lineâ infinitâ Z A X abscindantur æquales particulæ A *b*, *b g*, *g h* &c. usque in Z, quæ quò majores erunt, vel minores, eò tota scala erit major, minorve. Deinde totum intervallum AZ particularum 10 circino acceptum transcribatur decies in rectam infinitam AX, nimirum ex A in M; ex M in V; ex V in X, & sic deinceps. Hæc erit scala, quæ petebatur.

In qua si velis particulam A *b* repræsentare pedem unum, A *g* pedes duos, A *h* tres &c. repræsentabit MA pedes 10; VA pedes 20; XA pedes 30. Si autem velis A*b* accipere pro 10 pedibus, A*g* pro 20 pedibus, A *h* pro 30 &c. tunc MA referet pedes 100; VA pedes 200; & sic deinceps.

Itaque si cupiam unicâ circini aperturâ sumere intervallum ex. gr. partium 27, ex V in A sunt pedes 20; ex A in *n* sunt pedes 7, circini igitur crure uno fixo in V, & altero extenso usque in *n* habes lineam V *n* partium 27.

Eodem modo operandum erit, si cupias intervallum pedum 280. Tunc enim VA refert

partes

partes 200, & A *n* partes 80; ac proinde V *n* partes 280.

Sed quoniam ſcala hujuſmodi ſolùm poteſt exhibere partium decades & unitates, aut centenas & decades, aut millia & centenas, hoc eſt duos tantùm gradus progreſſionis decuplæ; aliam Practici Geometræ excogitarunt, quæ tres gradus progreſſionis decuplæ contineat, nimirùm millenas, centenas, decades; vel centenas, decades, unitates; vel decades, unitates, & unitatis decimas.

Alterius ſcalæ exactioris conſtructio.

Conſtruatur, ut ſuprà, ſcala ſimplex Z A X, & ex A erigatur perpendicularis infinita A L, in qua ſignentur 10 æquales particulæ ex A in L, ſive eæ æquales ſint particulis *A b*, *b g* &c., ſive non; & ex *b* termino particulæ A *b* ducatur *b* L, ut conſtituatur triangulum A L *b*, cujus ope invenientur partes decimæ ipſius A *b*. Deinde per ſingula diviſionum puncta rectæ A L ducantur parallelæ ad Z, X quarum poſtrema eſt C L T; & per ſingula diviſionum puncta ipſius *b* Z, parallelæ ducantur ad *b* L, quarum poſtrema eſt Z C. Denique per diviſiones M, V, X &c. ducantur MY, VT, X φ &c. parallelæ ad AL. Quibus peractis, abſoluta eſt ſcala exhibens tres gradus progreſſionis decuplæ. *Fig. 35.*

Nam lineolæ interceptæ in triangulo A L *b*, ſunt partes decimæ ipſarum A *b*, *b* G &c. quæ rurſum decimæ ſunt ipſarum A M, M V &c. *Quod facilè demonſtratur hunc in modum.*

Quo-

Digitized by Google

Quoniam *pk* per constr. est parallela ad *b* A, erit (a) *b* A ad *p k*, ut A L ad *k* L. Atqui per constr. quarum partium A L est 10, earum *k* L est 9. Ergo etiam quarum partium *b* A est 10, earumdem *p k* est 9; hoc est, *p k* est novem decimæ ipsius *b* A. Eodem modo ostendam, interceptam sequentem esse ipsius *b* A 8 decimas, & huic proximam 7 decimas, & sic deinceps, ac tandem ω esse decimam unam.

(a) *Coroll. 1. prop. 4. 6.*

In hac scalâ si in triangulo *b* L A intercepta prima α supponatur pro unitate quamlibet mensuram ex. gr. pedem unum repræsentante, tunc intercepta secunda erit 2; tertia erit 3; & sic deinceps usque ad A *b*. A *b* verò, seu L *f* erit 10; L ω erit 20; & sic deinceps usque ad L C. L Y erit 100, L T 200; & sic deinceps.

Quod si α supponatur pro 1 decimâ unitatis quamlibet mensuram repræsentantis, tum intercepta secunda erit 2 decimæ, tertia 3 decimæ; & sic porrò. A *b* verò, seu L *f* erit 1; L ω erit 2; & sic deinceps. L Y verò erit 10, L T erit 20, & sic deinceps.

Usum hujus scalæ ostendent Praxes sequentes.

PRAXIS I.

Tres gradus proportionis decuplæ ex scalâ desumere unâ circini apertura.

Ex gr. 366 partes scalæ, hoc est 3 centenas, 6 decades, 6 unitates. Incipe à gradu infimo, & in triangulo *b* A L quære sextam lineam *s r*, quæ dabit 6 unitates; tum in *s r* continuatâ versùs *d* numera 6 decades, seu 60,

ex s usque in q. Rursum ex r usque in β numera 3 centenas, seu 300. Denique circini pede uno fixo in β, alterum extende usque in q; recta, seu intervallum $\beta\ q$ continet partes scalæ 366.

Eodem modo erat operandum si petitæ forent partes 26 & 6 decimæ.

PRAXIS II.

Quot partes scalæ recta quævis in chartâ descripta contineat, invenire.

ACipiatur circino quantitas datæ rectæ E, quæ si major sit quàm L Y, eligatur ex rectis M Y, V T, X φ &c. ea, cujus distantia ab A L sit minor proximè quàm E; ea sit X φ. Deinde in rectâ X φ eligatur intersectio talis, ex. gr. β, ut uno circini crure posito in β, alter etiam incidat in aliquam parallelæ $\beta\ d$ intersectionem, ex. gr. in q. Quo obtento, nota erit recta E, nam $\beta\ r$ est 300, $s\ q$ est 60, $s\ r$ est 6; ac proinde tota $\beta\ q$, hoc est E, continet partes scalæ 366, si uno crure posito in β, alterum incidisset in s, tunc data E fuisset 306 part. scalæ, nam $\beta\ r$ est 300, & $s\ r$ 6: si in r, tunc data recta fuisset 300.

Quod si data recta E minor sit quàm L Y, tunc ejus quantitate, ut priùs, circino acceptâ, in recta A L eligenda est intersectio talis ex. gr. r, ut uno circini crure posito in r, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ $r\ d$ intersectionem, puta in q. Quo obtento, nota erit rursum data recta E. Nam $q\ s$ est partes scalæ 60, & $s\ r$ 6; adeoque tota $q\ r$, seu E est 66.

CA-

Digitized by Google

CAPUT V.

Diſtantiarum, & altitudinum dimenſio.

AD dimetiendas rerum diſtantias & altitudines varia Geometræ inſtrumenta, ſive organa excogitarunt: quæ omnia ſi proponere, atque exponere voluerimus, varietate rerum & praxium multitudine Tyrones obruentur potiùs, quàm inſtruentur. Quare hìc alio non utemur, quàm circulo, & quadrante circuli, ſive firmo, ſive pendulo. Hoc inſtrumento nihil ſimplicius, nihil parabilius. Caret varietate caſuum, qua implicatur quadratum: uſum verò præ cæteris omnibus habet non ſolùm in Practicâ Geometriâ, ſed etiam in Aſtronomiâ universâ ampliſſimum, & immediatum, ubi cætera nihil poſſunt, niſi prout à circulo derivantur.

Definitiones.

1. *Altitudo* eſt linea recta ad horizontem, id eſt Terræ ſuperficiem perpendicularis, ac proinde ad terræ centrum directa.

2. *Diſtantia oculi ab altitudine menſuranda* eſt recta A B, ab oculo A ad altitudinem C B perpendicularis. Atque ea ſemper intelligitur, cum diſtantia ſimpliciter nominatur. *Fig.* 38. 39.

3. *Diſtantia oculi ab aliquo puncto* C, ſeu diſtantia puncti A à puncto C, eſt linea recta ab oculi centro ad punctum, vel à puncto ad punctum extenſa.

4. *Angulus Altitudinis* eſt BAC, quem in *Fig.* 41.

 oculo

oculo A efficit distantia BA cum radio C A à vertice altitudinis ad oculum emisso.

5. *Angulus Distantiæ* est C A B quem in oculo A efficit A C perpendicularis ab oculo ad ipsam B C distantiam ducta, & radius B A ab extremitate distantiæ ad oculum directus.

Fig. 44 6. *Angulus intervalli duorum locorum* X, Z est X A Z, quem in oculo A efficiunt radii à locis X, & Z ad oculum directi.

7. *Mensuratio Geometrica* est, quæ ex quibusdam cognitis Geometrico ratiocinio peragitur.

8. *Mechanica*, quæ absolvitur applicando mensuram, ex. gr. perticam.

Geometrica adhibetur, cum deficit mechanica. Hæc, ubicumque adhiberi potest, illi præferenda; quia minùs errori exposita. Quamvis enim operationes Geometricæ secundùm se infallibiles sint, facilè tamen, sive vitio instrumenti, sive collocatione instrumenti malâ, error committitur, si mensor est imperitus, aut incurius.

Ut autem in calculo vitentur fractionum molestiæ; pertica, sive regula, quæ ad dimensiones mechanicas adhibenda est, sectione denariâ erit partienda: nimirum designanda in eâ erunt 10 pedum, aut plurium continua intervalla, quæ deinde singula erunt in decem æquales partes, quas Pollices appellamus, subdividenda. Si major accuratio desideratur; hæ iterùm singulæ in 10 æquales partes, aut certè in quinque, vel duas secari possunt. Ita porrò fiet, ut pro fractionibus aliis decimales solæ sint obventuræ, quas in calculo tractare possumus ut numeros integros, ut tradidi Arithm. *lib.* 2. *cap.* 11.

9. Al-

Digitized by Google

9. *Altitudo Accessibilis* dicitur, cujus distantia mechanicè mensurari potest.

10. *Altitudo inaccessa*, cujus distantia non potest mechanicè mensurari.

11. *Triangulum Opticum* voco, quod in aere aut superficie terræ per radios descriptum intelligitur.

PORISMA I.

Altitudinis angulum investigare

Quadrante stabili, seu firmo.

BAculum ferrea cuspide armatum solo infige: huic quadrantem A F L impone ea lege, ut latus unum F A sit perpendiculare ad Terram (quod ope perpendiculi obtinebitur) & centrum A sit infra, & planum quadrantis dirigatur in altitudinem C B. Deinde regulam A *o*, quæ circà centrum A volubilis est, ita attolle, vel deprime, ut oculus admotus centro A, & per regulæ A *o* utramque dioptram collimans conspiciat apicem C altitudinis mensurandæ. Arcus quadrantis L *o*, quem latus regulæ deorsum intercipit, indicabit quantitatem anguli quæsiti C A B: quot enim gradus, & minuta continebit arcus L O, tot graduum, & minutorum erit angulus altitudinis C A B. *Fig.* 39.

Quò quadrans erit major, eò erit inventio anguli accuratior, tum quia certiùs collocari potest latus horizonti perpendiculare, tum quia præter gradus, etiam minuta in eo signari possunt. Itaque cum dimensio summè exacta quæritur, fabricandus esset quadrans eâ ma-

Digitized by Google

gnitudine, qui limbum habeat non solùm in gradus, sed etiam in minuta prima; imò, si fieri possit, etiam in secunda, aut certè in secundorum decades subdivisum. Ex quo patet præstantia quadrantis præcedenti capite descripti, qui licet magnitudine sit mediocri, minuta prima exhibere potest.

Circulo pendulo.

Baculum, ut suprà, solo infige, & ex eo
Fig 38. appenso instrumento, ejusque plano versus altitudinem C B directo, regulam R *a* O ita circumage, ut oculus ad ejus extremitatem R applicatus, & per utramque illius dioptram collimans, conspiciat C apicem altitudinis mensurandæ. Arcus L O, quem instrumenti linea horizontalis S *a* L, & regulæ latus *a* O intercipiunt, indicabit quantitatem anguli quæsiti C *a* B.

Ut operatio evadat exactior, ejusmodi examen, & correctio adhiberi poterit. Ubi semel collimaveris, verte instrumentum, & collima denuò. Si in utraque collimatione arcus L O sint æquales, credibile est operationem fuisse exactam: sin verò inæquales, ut si in prima collimatione sit grad. 60, in secunda grad. 59; certum est aut in instrumento, aut in operatione vitium inesse: tum verò differentiæ semissem adde minori arcui, ut fiat grad. 59.30' pro angulo exacto.

Quadrante pendulo.

Baculo, ut prius, in terra defixo Quadrantem

Digitized by Google

tem impone, & latus Quadrantis A *o* dirige in apicem altitudinis C eâ lege, ut centrum *o* sit apici C propinquius; & oculus in A constitutus per utramque lateris dioptram collimando videat apicem C, & planum Quadrantis sit applicatum perpendiculo liberè pendenti. Arcus *f z* à perpendiculo abscissus indicabit quantitatem anguli *f o z*, qui angulo altitudinis æqualis est. *Fig. 40.*

Quod sic ostendes. Intelligatur ducta AB perpendicularis ad C B, quam perpendiculum *o f* secet in *q*. Igitur (a) C A B est angulus altitudinis, eademque A B etiam horizonti æquidistat; ac proinde perpendiculum *o f* ad eam in *q* perpendiculare est. Quoniam igitur ab angulo (b) recto A O X in basim A X cadit perpendicularis *o q*, erit angulus *q o x*, seu *f o z* æqualis (c) angulo *o* A *x*, seu C A B.

(a) *defin. 4.*

(b) *ex hyp.*

(c) *8. lib. 6.*

PORISMA II.

Angulum distantiæ invenire *Quadrante stabili.*

Latus unum A F statue horizonti perpendiculare, sic ut centrum A sit suprà, & planum quadrantis existat in plano C A B: tum regulam A O ita volve, ut oculus centro A applicatus, & per utramque dioptram regulæ collimans conspiciat extremitatem distantiæ B. Arcus FO indicabit quantitatem anguli distantiæ B A C. *Fig. 41.*

Digitized by Google

Circulo pendulo.

Fig. 42. Eadem eſt operatio, niſi quod circulo liberè, & quietè ſuſpenſo oculus applicandus ſit ad regulæ extremitatem ſuperiorem *r*.

Examen, & correctio adhiberi poteſt quæ ſuprà.

Quadrante pendulo.

Dirige latus quadrantis AO in extremitatem diſtantiæ B, ſic ut centrum A ſit ſuprà, &
Fig. 43. oculus centro A applicatus per dioptras lateris AO videat extremitatem B. Cætera ut ſuprà. Arcus O*f* à perpendiculo abſciſſus manifeſtabit angulum diſtantiæ B A C quæſitum.

PORISMA III.

Data ſint duo loca X, Z, & oculus in A; angulum intervalli XAZ invenire.

Fig. 44. PEnduli Circulus, & Quadrans huic operi inſervire non poſſunt.

Igitur planum Quadrantis firmi baculo in terrâ defixo impoſiti ſtatue in plano X A Z. Tum latus A*b* dirige in ſignum Z, & regulam A *c* in ſignum X, ſic ut oculus in A centro collimans per dioptras lateris A *b* videat Z, & collimans per dioptras regulæ A *c* videat X. Arcus *b c* manifeſtabit angulum intervalli quæſitum XAZ.

Quando angulus eſt obtuſus, ut FAL; poſi-
Fig. 45. to centro in A anguli vertice, ſtatue quadrantis

tis latus AB in directum cum uno anguli latere AF, collimando per dioptras B, A in F: regulam verò AO dirige in anguli latus alterum AL, collimando per dioptras A, O in L. Arcus OC indicabit excessum anguli dati FAL suprà rectum.

Angulus intervalli duorum locorum longè certiùs colligitur, quàm anguli altitudinis, & distantiæ, quòd neque situs perpendicularis, neque libramentum instrumenti, neque perpendiculum hìc requirantur, in quibus deviatio vel modica errorem notabilem in operationem inducit, ut ostendam infra in scholio probl. 16.

Scholium.

Judicium de instrumentis.

Cum certitudo dimensionum, quas dituri deinceps sumus, ab inventione accuratá horum angulorum maximè dependeat, operæ pretium fuerit hìc annotare quædam ad errores præcavendos idonea.

1. In quadrante stabili præcipuum erroris periculum est in collocatione perpendiculari unius lateris; deviatio quippe insensibilis à perpendiculo errorem infert in dimensione sensibilem, ut sub finem hujus capitis ostendam in scholio probl. 16. num. 1.

2. Quadrans pendulus eo periculo caret penitùs; sed aliâ eget cautelâ duplici circa liberum descensum perpendiculi: prima est, ut perpendiculo ita planum quadrantis applicetur, ut tamen illius libertatem contactu suo non impediat; secunda ut quiescat; quare ejus motum

leni

Digitized by Google

leni attactu elidere oportet, si nimis diu titubet. Utrumque factu perfacile. Unde Quadrantem pendulum, cum ejus esse usus potest, longè præferendum stabili existimo.

Fig. 42. *3. Circulus liberè suspensus utroque caret incommodo: cum enim seipsum libret, curâ nos liberat collocationis perpendicularis; & cum regulam habeat mobilem, etiam à perpendiculi molestiis expedimur. Verùm alia solicitudo succedit à circuli libramento perfecto, quod obtineri non potest, nisi diametrum FX, ex qua circulus suspensus est, quæque alteram SL perpendiculariter intersecat, partes æquè graves circumsistant. Defectum libramenti cognosces, si factâ collimatione unâ, vertas circulum, & denuo in idem punctum collimes. Tunc enim, si arcus à regulâ abscissi æquales fuerint in collimatione utrâque, proba erit instrumenti libratio: si inæquales, aut libramentum deficit, aut in graduum divisione erratum est. Nihilominus hic error, si non sit magnus, satis corrigitur, si (quod suprà monui) ejus semissem addas arcui ex repertis minori, is enim ita auctus inter nimis magnum, & nimis parvum medius est, ac proinde aut verus, aut certè vero propinquior. Magnitudine porrò circulus integer utrique quadranti manifestè cedit, cum è quatuor quadrantibus, quos complectitur, unus tantùm angulorum investigationi subserviat, tribus reliquis ad solum libramentum requisitis. Non deest etiam molestia à titubatione penduli instrumenti, quæ manu leniter admotâ elidenda est.*

Ex hactenùs annotatis ita statuo, Quadrantem pendulum in capiendis angulis altitudinis,

ac

Digitized by Google

ac distantiæ adhibendum præ omnibus; deinde Circulum; postremo loco Quadrantem stabilem, qui tamen duobus illis hoc antecellit, quod usum habeat latiorem, cum ejus solius ope reperiri possit, & quidem omnium securissimè, angulus intervalli, quod alia duo non possunt. Adde etiam, quod illi arcus minutorum expeditiùs applicari possit.

PROBLEMA I.

Distantiam inaccessam montis, vel turris per duas stationes metiri.

Turris, seu montis altitudo sit BC, distantia AB. In ipsâ lineâ distantiæ eligantur duæ stationes in A, & F, quarum intervallum metire mechanicè, & sit ex. gr. pedum 500. Ad hoc verò requiritur planities ampla, & patens, ut accedere ad rem distantem, aut recedere ab eâ tanto intervallo possis, quanto opus erit. Eò autem certior erit dimensio, quò intervallum fuerit majus. Radii visuales ab oculo in utrâque statione ad C verticem altitudinis sint AC, FC. Inveniantur (a) altitudinum anguli CAB, CFB, quibus subtractis à 90 gradibus, noti fiunt (b) anguli complentes ACB, FCB. Posito ergo Sinu toto (c) CB; angulorum ACB, FCB, Tangentes erunt AB, FB; ac proinde AF intervallum stationum est Tangentium differentia. Ergo est Fig. 46.

(a) *por.* 1. *c.* 5.
(b) 32. *lib.* 1. *vel annot* 11. *cap.* 3.
(c) *def.* 9. *c.* 2.

Ut AF differentia Tangentium angulorum ACB, FCB complentium altitudinis angulos	Ad majorem Tangentem AB

Ita

Ita AF stationum intervallum pedum 500	Ad distantiæ AB quæsitæ pedes.....

Tria prima sunt nota. Ergo etiam quartum innotescet, distantia nempè AB in eâdem mensurâ, in qua notum est AF stationum intervallum.

Aliter.

Intelligatur esse ducta FZ parallela ad AC. Fig. 46. Posito sinu toto FB, (d) erit CB Tangens anguli CFB, & ZB Tangens anguli ZFB, qui angulo altitudinis CAB per *prop.27. l.1.* æqualis est. Ergo CZ est differentia Tangentium angulorum altitudinis. Jam per *Coroll.1. prop.4. lib.6.*

(d) *defin. 9. cap. 2.*

Ut CZ differentia Tangentium, angulorum altitudinis CFB, CAB	Ad ZB Tangentem minorem
Ita AF intervallum stationum ped. 500	Ad minoris distantiæ FB pedes.....

Cum ergo tria prima sint nota, etiam quartum fiet notum per regulam proportionum.

Hic modus est primo aliquantò brevior, primus tamen in eo præstat, quòd eádem ferè operâ exhibeat etiam altitudinem, ut apparebit ex problemate 7.

Ab-

Digitized by Google

Absque Sinibus, & calculo inaccessam distantiam, imò & altitudinem eâdem operá metiri.

Angulo in prima statione invento describatur per prax.3. scol. *pag.* 23. *l.* 1. *elem.* in charta æqualis SAX; & quot pedum fuit intervallum stationum, totidem partes ex scala acceptas transcribe in latus AS ex A in F. Fiat deinde noto jam angulo stationis secundæ æqualis SFO, & latus FO occurrat lateri AX in C. Ex C demitte perpendicularem C B occurrentem lateri AS in B. Patet ex *prop.* 32. *lib.* 1, triangula ACB, FCB triangulis opticis utriusque stationis æquiangula, ideoque per *prop.*4. *lib.*6. iisdem similia esse; ac proinde AF referre intervallum stationum, & AB distantiam, & CB altitudinem. Inquire igitur, quot partes scalæ contineant AB, & CB: totidem quippe pedes distantia ipsa, & altitudo continebunt. *Fig.* 46.

Cum enim tres lineæ AF, AB, CB sint proportionales intervallo stationum, distantiæ, altitudini, & cum ex constr. intervallum stationum tot pedes contineat, quot scalæ partes continet AF; necesse est etiam distantia, & altitudo tot sint pedum, quot partium scalæ sunt AB, & CB.

Scholium.

Practici Geometræ, qui de hoc argumento hactenus scripsere, praxes suas absque limitatione ulla solent proponere. Unde fit ut ii, qui in rebus Geometricis parùm sunt experti, dum ab-

Digitized by Google

absque scrupulo ullo ubique, & semper eodem modo operantur, in magnos errores incidant: cæteri verò, qui peritiores sunt, dum errores tantos observant, neque satis ex quibus nascantur causis expendunt, sibi persuadeant, ferè nihil exactum hisce dimensionibus posse obtineri. His incommodis facilè occurretur, si limitationes, & determinationes necessariæ suis locis adhibeantur. Quod igitur in Geometriá Practicá desiderari potissimùm video, supplebunt scholia, quæ problematis, ubi opus erit, subjungentur.

I.

Sub angulo altitudinis valdè parvo incerta erit distantiæ dimensio.

Fig. 47. *Si enim instrumentis utamur ordinariæ magnitudinis, facilè error aliquis in capiendis angulis, altitudinis præsertim, committitur. Error autem vel minimus in quantitate anguli valdè parvi determinandâ commissus ingentem causat errorem in distantiá. Altitudo montis sit BC; distantia horizontaliter infinitè extensa BX. Exilem aliquem Angulum altitudinis, in statione videlicet admodùm remotâ, ponamus inventum esse CAB vero majorem: verus au-*
(k) 32.l.1. *tem sit CFB. Quoniam CAB externus (k) utrique CFB, & FCA æqualis est; erit FCA differentia falsi CAB, & veri CFB; hoc est FCA est ipse error, seu erroris quantitas. Statuamus deinde, in statione viciniori repertum esse aliquem altitudinis angulum præcedenti majorem CQB, qui à vero COB etiam differat angulo OCQ: & sint errores ambo FCA, OCQ*

æqua-

Digitized by Google

æquales. Manifestum est, FCA longè majorem intercipere partem FA in lineâ distantiæ, quàm sit OQ intercepta ab OCQ. Sunt autem FA, OQ errores distantiæ; siquidem FB est distantia vera collecta ex vero angulo altitudinis CFB, & AB est distantia falsa deducta ex falso angulo CAB, ac proinde FA distantiæ veræ, ac falsæ differentia, est error distantiæ. Atque idem eodem modo ostenditur in OQ. Liquet ergo cum peccatur in parvo altitudinis angulo, errorem distantiæ multo causari majorem, quàm in magno.

Imò fieri potest, ut idem error etiam minimus in altitudinis angulo semper decrescente, errorem in distantia causet quovis dato majorem; hoc est, ut distantia colligatur verâ major minorve decuplo, centuplo, millecuplo. Assumatur enim in quovis altitudinis angulo eadem semper quantitas erroris, quæ suprà, nempè FCA vel OCQ, & ex C ducatur CZ parallela ad BX. Cogitemus, angulum FCA moveri versus parallelam CZ, sic ut tandem unum ejus latus incidat in ipsam parallelam, & sit LCZ idem, qui FCA. Tum unum latus CL alicubi cum BX concurret, alterum verò nusquam, utpotè parallelum: ac proinde angulus ille cum parallelam attigerit, in linea horizontali intercipiet longitudinem infinitam. Ergo accedendo semper propiùs, ac propiùs ad parallelam, intercipere poterit longitudinem datâ quavis finitâ majorem. Atqui decrescente in infinitum altitudinis angulo CFB, unum ejus latus CA, ac proinde etiam angulus ACF, qui est erroris quantitas, accedit ad parallelam CZ propiùs semper ac propiùs in infinitum. Ergo decrescen-

te

Digitized by Google

te absque termino altitudinis angulo, potest error ACF intercipere partem ex BX datâ majorem, ac proinde vel minimus error in altitudinis angulo errorem in distantia causare potest quovis dato majorem.

Nota, *Hìc solùm expendisse me defectum anguli altitudinis ortum ex situ vitioso lateris superni CL; supponendo, infernum latus situm habere debitum, nempè horizonti parallelum, ex cujus defectu quid nascatur erroris, exponam in scholio probl. 16. Vitiatur situs lateris superni ex malâ collimatione ad apicem altitudinis, & inæquali divisione graduum, aliove instrumenti vitio.*

I I.

Quantum esse debeat intervallum stationum.

Fig. 46. *In constructione Problematis requiritur differentia aliqua Tangentium, vel angulorum altitudinis, vel angulorum ipsos complentium. Ea autem ut habeatur, necesse est, ut aliqua sit differentia ipsorum angulorum, & ut differentia angulorum obtineatur, opus est justo stationum intervallo. Loca stationum sint A, & F. Angulorum altitudinis in his stationibus CAB, CFB differentia est ACF (est enim CFB par*
(b) 32. lib. 1. *duobus (b) CAB, ACF): qui angulus ACF quò fuerit major, eò certior operatio erit: erit porrò eò major, quò stationum A, F intervallum fuerit majus. Toto hìc cœlo aberrant ii, qui non satis ista expendunt, dum arbitrantur, stationum intervallo quolibet ad libitum assumpto,*

sensibi-

Digitized by Google

ſenſibilem angulorum differentiam poſſe obtineri. Quantùm fallantur, ex inventione ipſá intervalli apparebit.

Quoniam conſultum eſt, ut differentia angularis ACF unius gradus exiſtat, ſtatuamus, altitudinis angulum CAB in ſtatione A eſſe 14 *grad., CFB in ſtatione F grad.* 15. *Ergo complementa eorum ACB, FCB ſunt grad.*76, *&* 75, *quorum Tangentes ſunt* (c) *AB, FB, & ex tabulis dantur* 401078, *&* 373205, *adeoque & Tangentium differentia* 27873, *ipſum videlicet intervallum ſtationum AF, cujus proinde ratio ad diſtantiam majorem AB reperitur, majorem Tangentem per Tangentium differentiam dividendo. Comperies igitur hac ratione, cum in prima ſtatione habetur altitudinis angulus* 14 *grad., ut obtineatur in ſtatione ſecundâ angulus uno gradu major, nempè grad.* 15, *oportere accedere per ſpatium AF, quod ferè ſit pars decimaquarta totius diſtantiæ AB, eodem modo inveſtigabitur quocumque dato altitudinis angulo in ſtatione unâ, quanto opus ſit ſtationum intervallo, ut acquiratur in ſtatione alterâ angulus altitudinis differens gradu uno, aut pluribus,*

(c) *defin.* 9. *cap.* 2.

Anguli altitudinis graduum	*requirunt intervallum ſtationum, quod ſit majoris diſtantiæ AB pars.*
19 & 20	$18\frac{93}{156}$
14 & 15	$14\frac{108}{278}$
10 & 11	$10\frac{403}{526}$
5 & 4	$4\frac{281}{287}$

Digitized by Google

III.

Quæ sit proportio altitudinis ad distantiam sub variis angulis.

Fig. 46. *In triangulo rectangulo ABC, dato altitudinis angulo A, datur proportio laterum AB distantiæ, quæ est Sinus totus, & CB altitudinis, quæ est Tangens anguli A per defin. 9. cap. 2. Itaque*

posito altitudinis angulo CAB	*erit altitudo CB distantiæ AB*
Graduum	Pars
20	$2\frac{272}{363}$
15	$3\frac{196}{267}$
10	$5\frac{118}{176}$
5	$11\frac{3772}{8748}$
3	$19\frac{44}{524}$
1	$57\frac{535}{1745}$

Fig. 48. *Hæc intellige, si distantia non sit tanta, ut propter rotunditatem terræ sensibiliter curva evadat, quod eveniet si gradum unum adæquet ambitus terreni. Altitudo montis esto CB, quæ protracta transit per terræ centrum X. Oculus sit in A. Intervallum AB grad. 1, quamvis in figurâ amplius sit assumptum commoditatis gratiâ. Quoniam angulus altitudinis per instrumentum capitur dirigente perpendiculo, quod semper tendit ad centrum terræ X; triangulum rectangulum distantiæ, quod hactenus consideravimus, non erit ABC, sed AOF, in*

quo

Digitized by Google

quo FO minor est sensibiliter (ut ostendam infrà in Scholio 2 Probl. 8) altitudine montis BC: distantiarum tamen AO, AB differentia minoris quidem, sed alicujus tamen adhuc momenti est, si cum BC comparentur; nullius, si inter se, ut ostendam numero 4. Quare cum distantia æquat 1 grad. proportiones jam traditæ sunt proportiones ipsius AO, seu AB ad FO; ac proinde majores quàm AB distantiæ, ad altitudinem veram BC.

IV.

Utrum rotunditas terræ officiat huic mensurationi distantiæ.

Ita suspicari quispiam posset ex iis, quæ num. 3 observavimus. Repetantur isthic observata unà cum diagrammate, in quo distantia mensoris à monte sit AB gradus unus terreni ambitus; hoc est (ut cap. 6. Prob. 4 docebitur) 24 milliarium Belgicorum. Linea distantiæ, cujus quantitas ex vi Problematis reperitur, est non arcus AB, sed AO Tangens superficiem terræ. Ducatur subtensa AB. Tangens AO unius gradus, excedit AB subtensam unius gradus nequidem parte millesimâ. Igitur AO subtensam AB, adeoque adhuc magis arcum AB insensibiliter excedit. Unde ne quidem in distantiam 24 milliarium Belgicorum quidquam erroris ullo modo perceptibilis rotunditas terræ derivat. Fig. 48.

PROBLEMA II.

Diſtantiam inacceſſam per duas ſtationes aliter metiri.

Fig. 49. vel. 50. DIſtantia menſuranda ſit AB, in cujus extremitate ſit turris, ſeu altitudo alia, cujus apex C diſtinctè videri poſſit. In planitie circumpoſitâ eligatur altera ſtatio lateralis F, cujus diſtantia à primâ A menſuretur mechanicè. Inveſtigentur deinde utriuſque ſtationis anguli, nimirùm FAC, AFC, cum quibus, & latere noto AF reperietur per *Probl.* 9 *cap.* 3 latus AC diſtantia menſoris à vertice turris BC; ſi nimirum fiat, ut Sinus anguli FCA ad Sinum anguli AFC, ita latus notum AF ad aliud.

Requiruntur ergo hæc.

1. *Planities ampla circa A, ut menſurari poſſit mechanicè intervallum ſtationum AF.*

2. *Intervallum ſtationum quàm fieri poteſt maximum, ut angulus FCA fiat ſenſibilis: quò enim ille major erit, eò certior operatio evadet. Expediet igitur, eum non eſſe minorem uno gradu; imò ſi fieri poterit, ut gradus æquet 4 vel 5, aut ſaltem tres, duoſve.*

3. *Ut non ſolùm in termino diſtantiæ menſurandæ erecta ſit altitudo quæpiam, cujus apex diſtinctè videri poſſit ex ſtatione utraque A, & F, ſed etiam ut in A extet ſignum, quod ex F, & in F ſignum, quod ex A ſpectari poſſit, ex. gr. cacumen turriculæ, aut domus. Quod ſi deſint ſigna viſibilia in A, & F, ea erunt quocumque demùm modo ſupplenda.*

4. *Ut*

Digitized by Google

4. *Ut angulus AFC, vel FAC, quem stationum intercapedo AF facit cum radio visuali, sit rectus, aut recto quàm proximus: tunc verò solvetur quæsitum per Probl. 3 cap. 3.*

Inventâ in hunc modum AC distantiâ mensoris ab apice turris BC, si existat sensibilis differentia inter AC,& AB, (quod quando accidat, in Scholio tradetur) tum in rectangulo trigono ABC, cum jam inventâ AC, & altitudinis angulo CAB, qui notus fiet per *por.*1, invenietur ipsa AB per *Prob.* 2 *cap.* 3.

Quod si defectu planitiei circa A mechanicè mensurari nequeat intervallum stationis lateralis AF; aut ex F loca A, & C spectari nequeant; aut tanta sit distantia, ut nimis magno opus sit stationum intervallo ad obtinendum sensibilem angulum FCA; confugiendum erit ad Problema *sequens.*

Cæterùm hæc mensurandæ distantiæ ratio videri posset anteponenda præcedenti, primò quia minori indiget stationum intervallo, ut ostendam infrà in Scholio num. 4. Secundò quòd ad longè majorem distantiam mensurandam se extendit, quàm præcedens. Quamvis autem hæc praxis tres requirat angulos, unum altitudinis, duos distantiæ, ubi altera solùm duos altitudinis, id tamen inde satis videtur compensari, quòd securior sit (ut dixi por. 3 sup.) angulorum distantiæ investigatio.

Aliter absque Sinibus, & calculo non solùm distantiam inaccessam, sed etiam altitudinem invenire.

Stationibus institutis, ut suprà, inventisque *Fig.* 49. *vel* 50.

 per

per instrumentum angulis: sume ex scalâ tot partes, quot passus ex. gr. erant in stationum intervallo, easque transcribe ex A in F. Ad extremitates rectæ AF fac (ı) angulos FAZ, AFX æquales angulis per instrumentum inventis; sitque FAZ primæ stationis angulus: latera deinde AZ, FX concurrant in C. Erit ergo triangulum (*b*) ACF æquiangulum; ac proinde (*c*) etiam simile triangulo optico, cujus basis erat stationum intervallum, apex verò in ipso apice altitudinis mensurandæ.

(a) *Prax.* 3. *Schol. prop.* 23. *lib.* 1.
(b) *Coroll.* 9. *prop.* 32. *l.* 1.
(c) 4. *lib.* 6.

Fiat deinde (*d*) angulus CAQ æqualis angulo sub quo visa fuit altitudo; & ex concursu C demittatur perpendicularis CB concurrens cum AO in B. Erit ergo triangulum ACB (*e*) æquiangulum; ac proinde (*f*) simile alteri optico triangulo, cujus unum latus erat distantia quæsita, alterum altitudo. Unde AF referente intervallum stationum; AB refert distantiam, CB altitudinem. Cum igitur per constr. tot passus contineat intervallum stationum, quot scalæ partes continet AF; etiam distantia, & altitudo quæsitæ tot continebunt passus, quot scalæ partes continent AB, & CB. Inquire igitur quot partes scalæ sint in AB, & CB: & numeri inventi indicabunt passus in distantiâ, & altitudine contentos.

(d) *Prax.* 3. *Schol.* 23. *lib.* 1.
(e) 32. *lib.* 1.
(f) 4. *lib.* 6.

Scho-

Scholium.

I.

Cur etiam hic magno opus sit stationum intervallo.

Ut intervalli stationum angulus FCA evadat sensibilis: quò enim ille fuerit major, eò certior futura est distantiæ inventio: quò verò minor, eò majus erit erroris periculum, ut ejus quantitas accuratè cognoscatur. Quod autem crescat angulus FCA aucto stationum intervallo AF, per se manifestum est. Fig. 49.

II.

Cur expediat, ut angulus AFC, vel FAC, quem stationum intercapedo AF facit cum visuali radio, sit rectus, aut recto proximus.

Quia angulo AFC existente recto, intervalli angulus ACF est maximus. Centro A per F describatur circulus, qui (a) *tanget radium CF ex hyp. perpendicularem radio AF. Ad utramlibet partem intervalli AF, sumantur intervalla ipsi AF æqualia, nimirùm AO, AL, quæ cum radio visuali efficiant angulos AOC, ALC non rectos. Quoniam radius CF circulum tangit, alii verò CL, CO necessariò secant; patet, angulum FCA majorem esse angulis OCA, LCA: atque eodem modo quibuscumque aliis.* Fig. 49. (a) 16. 3.

Digitized by Google

Pari modo idem oſtenditur, ſi rectus ſit angulus FAC, ut in figurâ 50.

III.

Quanto opus ſit ſtationum intervallo, ut intervalli angulus FCA exiſtat lubitæ magnitudinis.

Fig. 49. *In trigono AFC efficiat AF ſtationum diſtantia cum radio viſuali FC angulum rectum F; & intervalli angulus FCA ponatur eſſe grad. 1. Quæritur ratio AF ad AC. In trigono rectangulo AFC, AC eſt ſinus* (a) *totus* 100000. *AF verò eſt ſinus anguli C unius gradus, nimirum* 1745. *Quare diviſis* 100000 *per* 1745, *quotiens* 75 $\frac{535}{1745}$ *indicabit, quanta pars ſit AF ipſius diſtantiæ AC, minor videlicet unâ diſtantiæ parte quinquageſimâ octavâ, hoc modo ſupputavi tabellam ſequentem.*

(a) *def.* 6. *e.* 2.

Ut intervalli ang. FCA ſit	*Stationum intervallum AF debet eſſe diſtantiæ AC*
Grad.	Pars
1	57 $\frac{535}{1745}$
2	28 $\frac{2308}{3489}$
3	19 $\frac{573}{5233}$
4	14 $\frac{2350}{6975}$
5	11 $\frac{4135}{8715}$
6	9 $\frac{5932}{10452}$

IV. Lon-

IV.

Longè minori opus eſt ſtationum intervallo, dum una ſtationum lateralis eſt, quàm dum utraque directa.

Manifeſtum erit, ſi tabulam præcedentem conferas cum eâ, quam ſupputavi num.2.Probl. præc. Placet exemplo uno, alterove rem declarare. Fig. 49.

Menſuranda detur diſtantia milliariorum Belgicorum $5\frac{1}{2}$, *in cujus termino ſit mons altus dimidio Belgico milliari. Quoniam ergo hæc diſtantia altitudinis undecupla eſt, mons ille ſpectabitur* (b) *ſub angulo 5 grad. Quando autem altitudinis angulus eſt grad. 5, ut habeatur in ſtatione altera directa angulus altitudinis uno gradu minor, graduum nempè 4; ac proinde intervalli angulus FCA ſit gradus unius; opus eſt ſtationum intervallo,* (c) *quod ſit majus parte quintâ ferè totius diſtantiæ, hoc eſt in caſu præſenti uno circiter milliari Belgico. Dum verò ſtatio una lateralis eſt, ut obtineatur intervalli angulus FCA unius gradus, nequidem requiritur pro ſtationum intervallo AF diſtantiæ AC quinquageſima octavà pars, ut ex num. 3 patet; hoc eſt in caſu præſenti minus quàm* $\frac{11}{114}$ *unius milliaris Belgici; hoc eſt ferè decima Belgici milliaris pars. Ergo dum una ſtatio lateralis eſt, habetur intervalli angulus FCA unius gradus mediante intervallo ſtationum ferè decies minori, quàm dum utraque ſtatio eſt directa.*

(b) *oſtendi num. 3. Probl. præc.*

(c) *oſtendi num. 2. Prob. præc.*

Quod ſi, poſitis iiſdem, intervalli angulus

FCA

Digitized by Google

FCA desideretur 4 graduum; tunc si utraque statio accipiatur directa, ex calculo, quem tradidi num. 2. Problematis præcedentis, pro stationum intervallo requiretur totius distantiæ pars ferè 1 $\frac{1618}{7090}$, hoc est intervallum requiretur plus quàm dimidium totius distantiæ AB, ac proinde inutilis est tum praxis primi Problematis. At si una statio lateralis sit, obtinebitur angulus FCA grad. 4 assumpto intervallo, quod non adæquet partem distantiæ decimam quartam.

V.

Ad quantam distantiam mensurandam hoc Problema se extendat.

Assumatur pro intervallo stationum mechanicè cognoscendo medium milliare Belgicum, quod intervallum, quamvis non sine gravi labore, ac molestiâ mensuretur, tamen quando distantia, quæ proponitur investiganda, magni momenti est, ex. gr. ad reperiendum ambitum terræ, ut dicetur (a) infrà, operæ pretium erit, & hoc spatium, &, si opus est, etiam illo majus applicatâ decempedâ mensurare.

(a) cap. 6.

Hoc igitur assumpto intervallo stationum, si angulus intervalli FCA fuerit gradus unius, distantia per hoc Problema inventa excedet milliaria Belgica 28; distantia enim, ut patet ex num. 3 est ad stationum intervallum, ut 57 $\frac{535}{1743}$ ad 1, cum angulus intervalli est grad. 1. Ergo distantia hic continebit plus quàm 57 dimidia milliaria Belgica, hoc est plus quàm 28 integra. Hoc modo constructæ sunt tabellæ se-

ſequentes, quæ diſtantias per hoc Problema menſurabiles accuratè exhibent.

Poſito ſtationum intervallo dimidii Milliaris Belgici, ſi intervalli angulus FCA eſt	*Diſtantia per hoc Problema inventa excedet Milliaria Belgica.*
grad.	
1	$28 \frac{1}{2}$ ferè
2	$14 \frac{2308}{6978}$
3	$9 \frac{1}{2}$ ferè
4	$7 \frac{94}{351}$
5	$5 \frac{1}{2}$ ferè
6	$4 \frac{1}{2}$ ferè.

Poſito ſtationum intervallo pedum Antverpienſium 5000, ſi angulus FAC eſt	*Diſtantia inventa excedet.*	
grad.	*Pedes Antv.*	*ſive mil. hor.*
1	286532	14
2	143307	7
3	95547	4
4	71684	3
5	57372	$2 \frac{17770}{19981}$
6	47837	$2 \frac{8235}{19801}$.

Poſito ſtationum intervallo pedum Anteverpienſium 1000, ſi angulus FAC eſt	*Diſtantia inventa excedet*

grad.

grad.
1
2
3
4
5
6

Positoſtatio
ped. 100, *ſ*

grad

E:
m
l

Fig. 45

(a)
(b
c

Digitized by Google

ad 6249, adeoque nullius momenti, hoc modo constructa est Tabella sequens, ex qua intelliges, quando contemni possit differentia dicta.

Existente angulo altitudinis CAB	*Distantia AB excedet differentiam plusquam vicibus*
grad.	
1	6249
2	1639
3	724
4	409
5	262
10	65

PROBLEMA III.

Distantiam duorum locorum A, B variè impeditam per duas, & quando ita opus est, per tres, aut plures stationes metiri.

PRaxes Problemate 1, & 2 jam expositæ usui esse non possunt. Primò si neuter locus, vel alteruter adiri nequeat. Secundò, si neuter in plano sit: tunc enim stationum intervallum AF Probl. 1, & 2 assumptum, non poterit mechanicè mensurari. Tertiò si ex neutra stationum, vel alterutra nequeat conspici C apex altitudinis in distantiæ termino erectæ. Quartò si distantia sit tanta, ut duas solum adhibendo stationes nimis magno opus sit stationum intervallo, quod proinde mechanicè *Fig. 49. & 46.*

nicè mensurari vix possit. Quintò denique si desideres ex modico intervallo mechanicè noto, magnam distantiam invenire. Quis ergo in hisce casibus tenendus sit modus, hoc Problemate exponam.

CASUS I.

Fig. 51. 52. 53. 54. Mensuranda sit distantia locorum A, & B, quorum neuter adiri possit, vel aliud subsit ex tribus primis impedimentum. Eligantur in planitie aliqua stationes duæ in C, & F, quarum intervallum F C metire perticâ. Noti fiant anguli AFC, ACF: cum quibus, & latere noto F C reperietur (*m*) A C. Pari modo noti fiant anguli BCF, BFC; ex quibus, & latere noto F C innotescet (*m*) B C. Inveniatur deinde angulus ACB; cum hoc, & lateribus notis A C, BC reperietur (*n*) A B distantia quæsita.

(m) *per prob.* 9. *c.* 3.

(n) *per probl.* 10. *cap.* 3.

CASUS II.

Fig. 55. Quòd si locus, in quo es, sit talis, ut nequeant duæ stationes reperiri utrâque conditione requisita præditæ; nimirum, ut & sint in planitie, quò possit earum intervallum mechanicè mensurari, & conspici ex utraque possint A, B termini distantiæ mensurandæ; elige primo stationes duas F C in planitie positas, quarum intervallum metire perticâ: deinde duas alias quære O, Q, è quibus conspici possint A, & B, quarum distantia O Q reperiatur ope lateris mechanice noti F C, ut jam docui: tum per O Q jam notam eâdem metho-

Digitized by Google

methodo reperietur ipsa A B distantia quæsita.

CASUS III.

Mensuranda sit distantia A B, etiam maxima, assumpto ad libitum intervallo mechanicè notificando, etiam exiguo.

Per exiguum intervallum intelligo, quod non habet proportionem sensibilem ad distantiam, & cujus angulus imperceptibilis est, is nempe, cujus basis est intervallum, vertex autem in loco, cujus distantia quæritur. Unde si distantia sit enormis, qualis esset Pici montis, qui ex distantia 4 grad. apparet, etiam 1000 passus, imò medium milliare Belgicum esset respectu ejus intervallum nimis parvum. *Fig. 56.*

Præter stationum primam in A termino distantiæ, determina secundam lateraliter in C modico intervallo, quod metire decempedâ, & sit ex. gr. 100 pedum. Designa deinde intervallum secundum A F multo majus, quàm A C, quod præsidio lateris A C noti ex duabus stationibus A, C metire per *præc. Probl.* Rursus tertium designa intervallum A O majus quàm A F, quod ope lateris jam noti A F ex stationibus A, & F metire per *præc. Probl.* Quòd si jam intervallum A O tantum est, ut exhibeat angulum A B O sensibilem; ope ipsius A O ex stationibus A, & O metieris per *præced. Probl.* A B distantiam quæsitam. Quòd si angulus A B O nondum esset sensibilis, plures forent designandæ stationes, donec tandem evadat sensibilis. Porrò anguli ad unum A punctum existentes simul capiendi sunt, ne sæpiùs oporteat ad eumdem locum labore superfluo redire.

Hoc

Hoc artificio ingentes distantias, & aliàs omninò immensurabiles, posse innotescere, licet intervallum primum sit parvum, sic ostendo. A C primum intervallum sit 100 pedum Rhynlandicorum, & anguli A C F, A F O, A O B recti; anguli verò AFC, AOF, ABO unius gradus. Igitur, ut in *Scholio præc.num.* 3. ostensum est, AF continebit A C 100 ped. plus quàm 57 vicibus; ac proinde AF erit major pedibus 5700. Eodem modo erit AO major quàm AF pedum 5700, plus quàm vicibus 57, adeoque AO erit major pedibus 324900, hoc est 18 milliariis Belgicis. Pari modo AB distantia quæsita excedet AO pedum 324900 plus quàm 57 vicibus; ac proinde AB erit major pedibus 18519300, hoc est 1028 Belgicis milliariis. Tanta distantia assumpto tantùm intervallo primo 100 pedum per 4 stationes innotescceret, si locus B ex A, & O conspici, & stationes C, F, O, juxta conditiones positas obtineri possent.

Verùm quia intervallorum angulos ABO, AOF, AFC, convenit esse aliquot graduum; ponamus eos esse graduum 5, reliquis datis manentibus iisdem, quæ suprà. Igitur, ut ostendi
(*b*) *num.*3. in Scholio præcedenti, (*b*) AF erit plus quàm undecuplum primi intervalli AC pedum Rhynlandicorum 100, adeòque majus pedibus 1100. AO verò plus quàm undecuplum ipsius AF pedum 1100; ac proinde majus pedibus 11100: ac tandem AB distantia quæsita erit plus quàm undecupla ipsius AO pedum 11100, ac proinde major pedibus 111100; hoc est major 6 Belgicis milliaribus. Igitur per stationes quatuor in A, C, F, O, intervallo primo tantùm

exi-

Digitized by Google

ſtente pedum 100, diſtantia menſurabitur major milliaribus Belgicis.

Quod ſi intervallum primum aſſumatur pedum 1000, poterit per ſtationes tres A, C, F diſtantia 6 Belgicorum milliarium major innoteſcere, & per ſtationes quatuor major Belgicis milliaris 66, quod à nullo, quod ſciam, hucuſque eſt obſervatum.

Scio, ſtationes rarò poſſe juxta conditiones hìc poſitas præcisè ordinari. Verùm hæc eo fine dicta ſunt, ut appareat, quouſque hac induſtriâ pertingi poſſit: ſimul, ut Geometra, quæ optima ſit ſtationum ratio, intetelligat, ut ſi obtinere eam exactè non poſſit, ad illam certè quàm proximè conetur accedere.

Abſque Sinibus, & calculo.

Omnes caſus Problematis abſolves, ſi ex ſcalâ ſumas A F lineam tot partium, quot paſſus ex. gr. erant in ſtationum intervallo mechanicè menſurato, & ſuprà illam facias triangulum ſimile A C F primo optico triangulo, & ſuprà A F triangulum A O F ſimile ſecundo optico, & ſic deinceps quotquot fuerint, quod ſemper fieri poterit, cum in ſingulis opticis triangulis duo anguli per Inſtrumentum ſint noti. Latus ultimum A B repræſentabit diſtantiam quæſitam, quæ tot erit paſſuum, quot reperies in A B contineri partes ſcalæ. *Fig. 56.*

Demonſtratio eadem, quæ ſuprà Probl. 1, & 2.

PROBLEMA IV.

Distantiam inaccessam A B Turris, vel Montis datâ ejus altitudine B C metiri.

Fig. 40.

INveniatur per Porisma 1 altitudinis angulus C A B. Tum quia in trigono rectangulo ABC dantur acutorum unus C A B, & latus B C; reperietur per Probl. 3. *cap.* 3. latus alterum A B distantia quæsita.

Sine calculo.

Angulum altitudinis instrumento inventum aufer à gradibus 90, ut habeatur angulus complementi, cui æqualem fac S C Y. Deinde fiat CB tot partium scalæ, quot pedes erant in altitudine datâ; ducaturque B A perpendicularis ad C B, cui occurrat C S in A. Inquire quot partium scalæ sit A B, tot enim pedum erit distantia quæsita.

Est enim triangulum A C B *prop.* 32. *lib.* 1. æquiangulum optico triangulo, ac proinde per *prop.* 4. *lib.* 6. simile. Quare cum C B tot scalæ partes contineat, quot pedes altitudo data; etiam tot erit partium scalæ, quot pedum distantia quæsita.

PRO-

Digitized by Google

Potest etiam altitudo inaccessa per duas stationes solo baculo mensurari, quod relinquo industriæ lectoris.

Idem solâ baculi umbrâ efficere.

Baculum F L solo perpendiculariter defige eo loco, ubi radius solis X B A umbram turris B Z definiens, etiam transeat per L extremitatem baculi. Fac deinde notam mechanicè turris distantiam A Z, baculum F L, baculi umbram F A. Erit per *Coroll.* 1 *p.* 4 *lib.* 6. *Fig.* 64.

Ut A F baculi umbra	Ad baculum F L
Ita distantia A Z.	Ad altitudinem Z B.

Quia ergo tria prima sunt nota, innotescet etiam quartum altiudo quæsita B Z.

PROBLEMA XII.

Altitudinem accessibilem non solùm absque calculo, sed etiam absque scala metiri.

Sole, aut Lunâ 45 gradibus suprà horizontem elevatis, umbræ omnes in horizontalem terræ superficiem projectæ suis altitudinibus sunt æquales.

Radius Solis umbram turris B C definiens esto X C A. Quoniam ex hyp. angulus solaris altitudinis X A B in rectangulo trigono est *Fig.* 65.

 45 grad.,

Digitized by Google

45 grad., hoc est semirectus; etiam ACB semi-
(a) 32. lib. 1. rectus (a) erit; ac proinde æqualis angulo XAB, seu CAB. Ergo BA umbra, & BC
(b) 16. lib. 1. altitudo (b) æquales sunt.

Elevatio Solis suprà horizontem, sive angulus XAB invenitur per porisma 1, hoc solùm immutato, quòd loco oculi per dioptras collimantis, radius Solis per utramque dioptram A, O, vel R, O intromittatur. Vide *Fig.* 38. 39. 40.

Aliter.

Accede vel recede ab altitudine mensurandâ, donec angulum altitudinis CAB deprehendas in Instrumento grad. 45, hoc est regula, vel perpendiculum incidat in gradum 45. Ponamus hoc accidere in statione A. Metire perticâ distantiam AB. Ea enim altitudini BC æqualis est, ut patet ex demonstratione præcedenti.

PROBLEMA XIII.

Soli libramentum, & inæqualitatem metiri.

Fig. 66. ESto solum AEK. Oporteat metiri an A sit altius quàm E, & quanto.

Quadrantem suspende ex annulo *p*; & in E erectâ ad perpendiculum perticâ EG, collima per dioptras *b*, *c*, in perticam, & notari jube punctum H quod visui per dioptras collimanti respondet. Ut verò punctum in perticâ visui respondens faciliùs notetur, chartulam,

seu



seu strophiolum sursum, deorsumque secus perticam moveri jube à quopiam, donec ejus extremitatem videas per dioptras. Aufer deinde *o* A, seu *b* F altitudinem oculi ab H E, remanet F E elevatio loci A suprà E.

Quod si loca ita distarent, ut unicâ operatione res absolvi non possit; operatio jam tradita sæpiùs iteretur, & inventi elevationum excessus inter se addantur.

Si inter loca A, N, quorum inquiritur altitudo, intercedat locus X altior utroque; tunc stans in B metire, ut jam traditum est, elevationem loci X suprà A; & elevationem loci ejusdem X suprà N minorem elevationem A H subtrahe à majori L N, remanet N Q elevatio loci A supra locum N. Ex his colliges quomodo in reliquis casibus sit operatio instituenda. *Fig. 67.*

Non solùm Quadrante hoc in negotio licebit uti, sed etiam Circulo, in quo regula mobilis priùs erit collocanda parallela ad horizontem. Necesse est autem tam Quadrantem, quam Circulum ita libratum esse, ut linea per dioptras B, C transiens sit horizonti parallela: aliàs fallax operatio erit. Id verò sic experire. Ubi semel collimaveris per dioptras B, C, & in altitudine ex adverso erectâ observaveris punctum H, verte Quadrantem, ut dioptra C jam sit in *c*, & B in *b*. Tum si rursum per dioptras idem cernas punctum H radius visualis per dioptras transiens, erit horizonti parallelus: quod si tum aliud quidpiam X punctum visui respondeat, non erit radius per dioptras transiens parallelus horizonti. Erit nihilominus punctum Z inter utrumque medium ejusdem cum oculo *Fig. 68.*

Digitized by Google

altitudinis. Unde Instrumento etiam vitioso licebit in erectâ ex adverso altitudine punctum ejusdem cum oculo altitudinis designare per collimationem duplicem jam dictam, ac proinde soli inæqualitatem reperire.

Fig. 69. Verùm linea horizontalis non alio Instrumento certiùs designatur, quàm vitreo syphone DBCE: aqua enim intra illam posita, & pertingens ex. gr. usque in F, & G, ita se sponte suâ librat, ut ipsius in utroque syphonis brachio superficies extrema F, & G semper distent æqualiter à centro terræ, quomodocumque instrumentum inclinaveris. Ex quo sequitur, lineam per extremitates aquæ F, & G transeuntem esse horizonti parallelam. Quare si per F, & G, sive juxta F, & G collimaveris, radius visualis erit horizonti verè parallelus, punctumque in altitudine ex adverso positâ visui respondens erit ejusdem cum oculo altitudinis.

Necessarium est hoc problema ad fontes ducendos, & aquæductus ordinandos.

Scholium.

Fig. 58. 59. *Ex hoc problemate etiam colligitur quid fieri debeat altitudini illi BZ, quæ infrà oculum est. Ea enim, si major, aut minor sit altitudine oculi LA, est mensuranda, ut hoc prob. traditum est, & BC altitudini adjicienda; si æqualis est altitudini oculi LA, tunc ipsa LA oculi altitudo addenda est ad altitudinem BC.*

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA V.

Longitudinem mediocrem CB in horizontali plano extensam horti, areæ, porticus &c., latitudinem fluminis &c. metiri.

NOta sit AC altitudo mensoris, sive ea sit statura ejus, sive major, sive non. Metire (*a*) angulum distantiæ BAC. Tum quia in trigono rectangulo ACB dantur acutus BAC, & latus AC, reperietur per Probl. 3. *cap*. 3. latus alterum BC distantia quæsita. *Fig. 43.* (a) *Perif.* 2.

Sine calculo.

Angulo distantiæ per instrumentum reperto fac æqualem SAX. Deinde fiat AC tot partium scalæ, quot pedum datur altitudo oculi; ducaturque CB perpendicularis ad AC, cui occurrat AX in B. Inquire quot partes scalæ contineat CB, tot enim pedum erit longitudo quæsita.

Demonstratio similis præcedenti.

Aliter.

Quadrantis ad horizontem paralleli, aut ferè paralleli latus AC dirige in signum aliquod in B termino distantiæ modicè elevatum. Collima deinde per latus alterum AF in signum aliud Z isthic erectum, aut erigendum, & mechanicè innotescat AZ. Inveniatur tandem angulus Z, cum quo, & latere noto AZ reperietur (*c*) in trigono rectangulo ZAB latus AB distantia quæsita. *Fig. 57.* (c) *Probl. 3. cap. 3.*

Digitized by Google

Sine calculo.

Angulo acuto per instrumentum invento fiat æqualis FZS. Deinde fiat ZFA tot partium scalæ, quot pedum erat intervallum mechanicè notum, ducaturque AB perpendicularis ad ZA, cui occurrat ZS in B. Inquire, quot partium scalæ sit AB; totidem quippè pedum erit longitudo quæsita.

PROBLEMA VI.

Latitudinem fluminis, seu lacus aliter metiri.

Fig. 41. 42. 43.

COllimando in ulteriorem fluminis ripam notus fiat per instrumentum angulus distantiæ. Deinde verte instrumentum ad continentem; & constitue, ut erat priùs: nimirum, ut perpendiculum, vel regula abscindat eundem distantiæ angulum, sive arcum FO, quem in situ priori. Collimando deinde per dioptras AO punctum, quod in horizonte conspexeris, puta B, signari jube, & metire longitudinem CB mechanicè, ea enim est par latitudini fluminis, ut per se patet.

Atque hæc hactenùs de distantiis potissimùm. Nunc ad altitudines, quamvis eas suprà jam attigimus, accuratiùs investigandas accedamus.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VII.

Altitudinem inaccessam montis, seu turris CB metiri.

INstituatur operatio eadem, quæ fuit adhibita in Problematis 1. modo 1, binis stationibus in lineâ distantiæ in A, & F determinatis. Fig. 58.

Ut AF differentia Tãgentium angulorum ACB, FCB complentium angulos altitudinis CAB, CFB	Ad sinum totum BC
Ita AF stationum intervallum, ex. gr. pedum 1000	Ad altitudinis quæsitæ BC pedes.....

Tria prima sunt nota. Innotescet ergo etiam quartum, altitudo nempè BC in eâdem mensurâ, in quâ notum erat AF stationum intervallum.

Sine calculo.

Vide Problema 1, ubi distantia, & altitudo unâ eâdemque operâ absque Sinibus, & calculo ullo sunt inventæ.

Nota, tum hìc, tum in sequentibus, mensurari solùm eam altitudinem, quæ suprà oculum est, quam determinat linea recta AB ducta à mensoris oculo posito in A ad altitudinem perpendicularis, adeoque parallela ad horizontem. Altitudini ergo inventæ addenda est men-

soris statura AL, seu BZ, si basis altitudinis Z, & L pes mensoris sint æquè alta: quod si (ut in fig. 59) altitudinis basis sit demissior pede mensoris, mensuranda est per Probl. 13 altitudo BZ, & altitudini priùs inventæ BC adjicienda, ut priùs

Scholium.

Ex quâ distantiâ securissima sit altitudinum dimensio.

Fig. 60. *Non tutò ex quálibet distantiâ altitudines mensurantur. Perinde obsunt & magna distantia, & vicinitas magna. Distantia quidem, quia facit, ut sub exiguo angulo spectetur altitudo, ac proinde in capiendo angulo facilè committatur error angulo justo par, aut major, unde fit, ut altitudo colligatur multò major verâ. Ut si angulus justus sit CAB, & putetur esse ZAB; colligetur altitudo BZ pro verâ BC. Accedit, quod cum binis stationibus opus est, ingentia requirantur* (a) *stationum intervalla, ut parvi altitudinum anguli sensibilem habeant differentiam. Magna vicinitas obest, quia efficit, ut BCQ angulus, sub quo altitudo BQ conspicitur, vix differat a recto; ac proinde alter CQB sit acutus insensibilis. Unde facilè accidet, ut altitudo colligatur decies, aut centies verâ major: quod demonstrabitur, ut num. 1, si tantùm figuram inverteris, quod hìc factum vides.*

(a) *ostendi in Sch. prob. 1. num. 2.*

Fig. 61.

Fig. 58. 59. *Certissima igitur erit altitudinum dimensio ex distantiâ mediocri. Ea porrò est, quæ angulum altitudinis CAB exhibet semirectum, nem-*

pè

PROBLEMA XIV.

Altitudines montis ex monte ipso metiri.

ELigantur in monte stationes binæ in C, & F justo intervallo distantes, ex quibus collimari possit in signum aliquod X in plano horizontali positum per radios AX, BX; & sint AL, BQ ad horizontem perpendiculares. Per porisma 2. noti fiant anguli LAX, QBX, & mensuretur intervallum stationum CF, seu LQ, quod sit ex. gr. pedum 100. Fig. 70.

Per defin. 9. cap. 2. respectu anguli noti LAX Sinus totus est AL, Tangens LX; & respectu noti anguli QBX Sinus totus est BQ, hoc est AL; Tangens verò QX; ac proinde LQ, seu CF stationum intervallum est Tangentium differentia. Ergo est

Ut CF differentia Tangentium angulorum A, B	Ad AL Sinum totum 10000000
Ita CF stationum intervallum pedum 100	Ad altitudinis AL pedes ......

Tria prima sunt nota. Ergo & quartum, nempè AL innotescet: à quo deme AC altitudinem oculi suprà montem ex. gr. 6 pedes, remanet CL nota, ipsa videlicet montis altitudo quæsita.

Digitized by Google

Sine calculo.

Fig. 70. Describe in chartâ rectam CF tot partium ſcalæ, quot pedum erat ſtationum intervallum: & perpendicularem erige CA tot partium ſcalæ, quot pedum erat altitudo oculi ſuprà montem. Fiat deinde angulus CAO æqualis noto angulo ſtationis primæ. Ex F erige perpendicularem FB, æqualem ipſi CA; & fiat angulus FBK æqualis angulo noto ſtationis ſecundæ: concurrant autem AO, BK in X. Per X duc CL perpendicularem ad AC productam in L, quæ erit quoque perpendicularis ad BF protractam in Q. Inquire quot partes ſcalæ contineat AL, ſeu BQ: totidem quippe pedes continebit altitudo montis unà cum altitudine oculi ſuprà montem. Demptâ igitur altitudine oculi ſuprà montem, relinquitur ipſa montis altitudo quæſita.

Liquet enim ex *prop.* 32. *lib.* 1, triangula LAX, QBX triangulis opticis æquiangula eſſe, ac proinde per *prop.* 4. *lib.* 6. ſimilia. Quare cum CF repræſentans intervallum ſtationum ſumpta ſit tot partium ſcalæ, quot ipſum ſtationum intervallum continebat pedes; etiam AL, ſeu BQ altitudinem referens tot erit partium ſcalæ, quot altitudo ipſa eſt pedum.

PROBLEMA XV.

Altitudinem nubis metiri.

Fig. 71. NEgotium hìc faceſſunt nubis motus, & inſtabilitas, ſeu mutatio figuræ continua: unde

Digitized by Google

unde fit, ut non facilè designari in nube possit stabile punctum, in quod ex duplici statione collimetur. Oportebit igitur nubem seligere, quales tranquillo coelo cernuntur, quæ nimirum non moveatur sensibiliter, & quæ marginem aliquem habeat notabilem, cujus extremitas ex. gr. C dignosci possit, ut in eam eodem tempore duo mensores ex diversis stationibus colliment. His positis.

Punctum in nube collimationibus destinatum esto C; altitudo nubis sit CB; linea distantiæ AB: in quà designentur binæ stationes in A, & F distantes justo intervallo, quod vix esse minùs poterit aliquot pedum millibus, licèt horizontalis distantia nubis AB mediocrem non excederet, sub qua tutissimam esse altitudinum dimensionem docui in Scholio Probl. 7. Ex his stationibus A, & F duo mensores, signo dato, in designatum C punctum nubis eodem tempore collimantes, notos faciant angulos CAB, CFB: ex quibus, & spatio mechanicè noto per Probl. 7 reperietur altitudo nubis quæsita CB.

Aliter, & certiùs idem obtinebitur, si statio altera eligatur lateralis in X, & operatio instituatur, ut in Probl. 8.

Ricciolus cum Grimaldo reperit altitudinem nubis candidæ passuum 2177, seu pedum 10885.

PROBLEMA XVI.

Altitudinem Iridis invenire.

PRænoscenda sunt quædam ex Dioptricâ. *Fig. 72. 73. 74.*
Primò Iridem esse perfectè circularem.

Digitized by Google

Secundò, tria centra O, A, Z, Iridis nempè, oculi, & Solis esse in unâ recta. *Tertiò*, rectam illam Z A O, ad quam sunt tria prædicta centra, ad planum Iridis semper esse perpendicularem. *Quartò*, Sole occumbente (*vide Fig.* 72) integrum Iridis semicirculum FCQ videri posse: tunc enim linea recta Z A O per centra Solis Z, oculi A, Iridis O transiens est horizonti parallela, ac proinde O centrum Iridis suprà horizontem existit. Tunc quoque planum Iridis FCQ est ad horizontem perpendiculare. *Quintò*. Sole suprà horizontem LB elevato (*vide Fig.* 73.) non apparet integer Iridis semicirculus; tunc enim O centrum Iridis, quod semper est in rectâ per Z centrum Solis, & A centrum oculi transeunte, existit infrà horizontem LB, unde tantùm pars SCR conspicua est, & tunc planum Iridis est obliquum horizonti, angulusque inclinationis CBA obtusus est. *Sextò*, cum magna est oculi suprà horizontem altitudo, posse ex Iride videri plus quàm semicirculum Sole occumbente (*vide fig.* 74.), & tunc planum Iridis inclinatur versùs oculum.

His prænotatis, observatum est à Cartesio, & satis consentiunt experimenta Riccioli. *Primò*, Iridis angulum CAO contentum radiis AC, AO ab oculo A ad Iridis verticem C, ejusque centrum O emissis esse circiter grad. 41 47′. Observatum est *secundò*, distantiam A O oculi à plano Iridis non excedere 1000 passus Bononienses.

Al-

Digitized by Google

pè graduum 45, aut semirecto quàm proximum. Ita enim & incommoda jam dicta licebit effugere, & faciliùs angulorum sensibilis differentia stationibus variatis obtinebitur.

Anguli altitudinis Graduum	requirunt stationum intervallum, quod sit distantiæ majoris pars.
45 & 46	$29\frac{[illegible]}{3432}$
45 & 44	$29\frac{516}{5353}$
45 & 47	$14\frac{5514}{6749}$
45 & 43	14 [illegible]

Est autem visa sub angulo 45 grad: altitudo par distantiæ.

Cæterùm hæc stationum intervalla, licèt satis sint moderata, longè tamen adhuc superant ea, quibus utitur Problema sequens, ut patebit, si hæc intervalla conferas cum iis, quæ continentur tabellâ numeri 3 in Scholio Probl. 2.

Quoniam verò constructio hujus Problematis eadem est, quæ primi Problematis, etiam huc pertinent ea omnia, quæ ibidem in Scholio num. 2. 3. 4 determinavimus.

Nota Etiam hic (quod notari jusseram suprà in Scholio 1 Probl. num. 1.) attendisse me hìc solummodò situm vitiosum lateris superni in angulo altitudinis, supponendo infernum debitum habere situm, nempè parallelum horizonti. Ex hujus enim defectu quantus error proveniat, ostendam in Scholio Probl. 16.

Digitized by Google

PROBLEMA VIII.

Altitudinem inaccessam montis, aut turris CB aliter, & certiùs metiri.

Fig. 49. PRæter A locum stationis primæ eligatur ad latus statio altera in F, servatis iis, quæ Probl. 2. præscribuntur. Deinde cognito mechanicè stationum intervallo A F mensuretur per Probl. 2. AC distantia mensoris à montis, seu turris cacumine C.

Tandem in trigono rectangulo ABC notus fiat angulus CAB, cum quo, & basi notâ AC reperietur per *Probl. 2. cap. 3* latus CB altitudo quæsita.

Hic modus videtur præstantior esse præcedenti. 1, quia (ut ostendi in Scholio Probl. 2. n. 3 & 4) incomparabiliter minori opus habet stationum intervallo, ut angulus ACF fiat sensibilis, quod omninò requiritur, ut patet ex num. primo citati jam Scholii. 2, quod ex primo consequitur; quia ex longè majori distantiâ altitudines mensurari possunt hac praxi, quàm præcedenti, ut in Scholio sequenti num. 1. demonstrabitur.

Sine calculo.

Vide Problema 2, ubi unâ eâdemque operâ altitudo simul cum distantiâ absque Sinibus, & calculo inventa est.

Scho-

Digitized by Google

Scholium.

Quæ de mediocri distantiâ eligendâ tanquam optimâ in Scholio Problematis præcedentis determinavimus, omninò etiam ad præsens Problema pertinent. Huc item omninò pertinent ea omnia, quæ in Scholio 2. Probl. num. 1. 2. 3. 4. determinata, ac demonstrata sunt, cum ea omnia spectent inventionem distantiæ AC, per quam hìc elicitur altitudo BC. Verùm hìc ulteriùs superest definiendum.

I.

Ex quantâ distantiâ possint altitudines satis adhuc securè juxta modum hujus problematis determinari.

Certissimam esse altitudinum dimensionem ex distantiâ mediocri, in quâ altitudo spectatur sub angulo semirecto; in scholio præcedenti ostensum est; quæ determinatio tam in hoc problemate locum habet, quàm in præcedenti. Nunc alia regula generalior, & huic modo propria hæc sit: Ex omni eâ distantiâ satis tutò altitudo mensurabitur, ad quam ipsa proportionem habet sensibilem; *nisi fortè distantia esset tanta, ut rotunditas terræ altitudinis dimensioni officiat, quemadmodum num. seq. exponetur.*

Ea porrò regula propria huic modo est. Ut enim applicetur ad modum problematis præcedentis, enormia stationum intervalla requiruntur, ut ostensum est num. 2 scholii probl. 1, & num. 3. ac 4. scholii prob. 2.

II.

I I.

An rotunditas terræ officiat altitudinum dimensioni jam traditæ.

Fig. 48. *Asserit Ricciolus in suo Almagesto lib. 10. sect. 4. prob. 31. & probat: quem in sua Dioptrâ Geodæticâ reprehendit Valentinus Stansel, quasi Practicos Geometras immeritò Pseudographiæ accusaverit. Sed vera dixisse Ricciolum manifestum fiet ex his, quæ hic subjicio.*

Dico igitur, si dimensio fiat ex distantiâ magnâ, quæ nimirum adæquet unum gradum ambitus terreni, altitudinem colligi notabiliter verâ minorem.

Altitudo montis sit CB trium milliariorum Bononiensium, continuata usque ad terræ centrum X. Unus gradus maximi terræ circuli esto AB. Radius ab oculo in A posito ad montis apicem emissus AC. Recta AO tangens terram in A altitudini montis occurrat in O. Ex O ad Tangentem AO sit perpendicularis OF occurrens radio AC in F. Ex vi dimensionum hactenus traditarum reperitur non BC altitudo vera, sed OF verâ minor. Reliquum est, ut inquiratur, quanta sit differentia ipsarum OF, BC.

Cum differentia ea caussetur à rotunditate terræ, quæ eò insensibilior fit, quò terra ejusque semidiameter ponitur major, roborabitur vis discursus sequentis, si terræ diameter assumatur verâ major.

Assumatur ergo radius terræ milliariorum Italicorum 4169, quantum nemo recentium

Astro-

Altitudo Iridis semicircularis.

Ex his demonstrabimus, radium OC, hoc est Iridis altitudinem, cum integer illius semicirculus apparet, non excedere 893. 5' 7" passus, hoc est pedes 4795. Fig. 72.

Cum enim per prænotatum 3 angulus COA rectus sit; erit trigonum AOC rectangulum, in quo proinde respectu anguli CAO grad. 4. 47', Sinus totus est AO, distantia nempè oculi: Tangens verò est CO radius Iridis. Igitur est

Ut AO Sinus totus 100000	Ad CO Tangentem anguli CAO grad. 41, 47', nempè 89357
Ita AO distantia oculi per obser. 2. non major passibus 1000	Ad passus..... radii Iridis CO.

Qui proinde per regulam Trium reperitur passuum 893. 5' 7".

Quod si ejus distantia, ut fit plerumque, sit minor passibus 1000, etiam altitudo ejus CO passibus 893 minor erit, & eodem scrutinio reperietur.

Altitudo Iridis semicirculo minoris.

Altitudo Iridis sit CF perpendicularis ad horizontem LABF. Mensuretur altitudo Solis suprà horizontem LABF, angulus nempè ZAL, cui æqualis est OAB. Per prænotatum 3 recta Fig. 73.

ZAO

ZAO centra Solis Z, oculi A, iridis O connectens perpendicularis est ad iridis radium OBC, adeoque trigonum AOB rectangulum est. In quo quia notus est acutus angulus OAB, etiam (a) acutus alter ABO innotescet: quo subtracto à duobus rectis, hoc est à gradibus 180, remanet notus (b) ABC. Deinde quia per observationem 1. angulus CAO est gr. 41 47′, si ab eo dematur OAB notus, relinquitur etiam BAC notus, latus autem AB per observationem 2 datur circiter 1000 passuum. Ergo cum in triangulo ACB detur latus AB cum duobus angulis ABC, BAC; reperietur per Probl. 9. *cap.* 3. BC. Subtrahatur deinde ABC notus à gradibus 180, ut fiat (c) notus CBF: cum quo, & notâ BC reperietur in trigono rectangulo CFB, per Probl. 2. *cap.* 3, CF altitudo Iridis quæsita.

(a) *Coroll.* 8. *p.* 32. *lib.* 1.

(b) 13. *l.* 1.

(c) 13 *l.* 1.

Altitudo Iridis semicirculo majoris.

Fig. 74. Linea horizontalis sit L*b*, & suprà eam altitudo oculi A magna XA: altitudinem Iridis repræsentet perpendicularis CK. Centro Quadrantis stabilis posito in A, ita Quadrantem statue, ut radius Solis transeat per utramque lateris dioptram. Tum verò, quia centra Solis Z, oculi A, Iridis *o* sunt in unâ rectâ, patet latus Quadrantis directum esse in Iridis centrum *o*: quo sic manente, dirige regulam mobilem in punctum *b*, in quo diameter Iridis occurrit horizonti. His ita constitutis, innotescit angulus *o* A *b*: cum quo, & latere A *o* per observ. 2. noto; fiet in trigono A *ob*, quod per prænot. 3. rectangulum est, nota *o* A *b*. Subtrahe deinde

(o) *Prob* 3. *cap.* 3.

Digitized by Google

inde notum jam angulum *o* A *b* à gradibus 90, ut innotescat (p) A *b o*, seu A *b* C: angulo autem CA *o*, qui per observ. 1. est grad. 41 47' adde notum angulum *o* A *b*, ut innotescat totus CA *b*: Quoniam ergo in triangulo AC *b*, nota sunt latus A *b*, & duo anguli A *b* C, CA *b*; reperietur per Probl. 9. *cap*. 3. *b* C. Mensuretur deinde angulus XAZ: quo dempto à gradibus 90, notus remanebit, per *prop*. 32. *lib*. 1, angulus AZX, sive *o* Z *b*. Tum quia in triangulo Z *o b* angulus ad *o* rectus est per prænot. 3, & *o* Z *b* altitudo Solis suprà horizontem Z *b* jam notus; etiam Z *b o*, seu *k b* C notus fiet. Quoniam igitur in trigono rectangulo C *k b* nota est C *b*, & angulus *k b* C innotescet per Probl. 3. *cap*. 3. C *k* altitudo Iridis quæsita. (p) 32.1.

Scholium.

Concludam hoc caput duplici quæstione ad Mensoriæ Artis peritiam pleniorem non parùm utili.

PRIMA

Quantus sit error, qui oritur ex perpendiculi defectu

Hic ferè præcipuus defectus est, & maximè ordinarius, quo altitudinum dimensio vitiatur. Quare ejus origo, & quantitas hic erit nonnihil accuratiùs exponenda. Fig. 39.

Cum altitudines metimur, semper inferiùs latus AB anguli CAB, qui per instrumentum invenitur, esse debet horizonti parallelum; aliàs

enim

enim non haberetur trigonum rectangulum ABC. Id verò obtinetur ope perpendiculi: nam in Quadrante stabili ope perpendiculi statuitur latus instrumenti AF, perpendiculare horizonti: unde consequens est, ut latus alterum AL, ipsum nempe anguli CAB latus infernum, sit horizonti parallelum. Quod si latus AF non sit accuratè perpendiculare, neque latus ALB erit accuratè parallelum.

In Quadrante autem pendulo angulus instrumento inventus f o *Z æquatur angulo CAB, cujus latus A* q x *B est ad perpendiculum* o f
Fig. 40. *perpendiculare, ut patet ex prop. 8. lib. 6. Unde si funiculus* o f *non sit perpendicularis horizonti, (quod accidere solet vel propter motum ejus, vel quòd nimis radendo planum instrumenti, non pendeat liberè) non erit etiam A* q x *B horizonti parallela.*

Ponamus igitur, latus infernum anguli per
Fig. 73. *instrumentum inventi non esse horizonti parallelum, ac proinde neque rectum cum altitudine* b *C angulum efficere, sed cadere infrà, vel suprà parallelam horizonti A*b, *uti cadunt rectæ A*z, *A* z. *Quæritur quantitas erroris ex hoc defectu in altitudinis mensionem derivata.*

Statuamus mensoris oculum in A; altitudinem veram b *C; radium AC ab oculo per ejus apicem C; distantiam A*b, *ac proinde & A* z 1000 *pedum; ex* z *erectam* z *X perpendicularem ad A*z, *cui occurrat radius AC in X.* z *C est altitudo falsa, cujus quantitas ex hoc situ vitioso innotescet loco veræ* b *C. Ponamus insuper angulum* z *A*b, *quo deflectit A*z *à parallelo situ A*b, 30' *min., ipsum verò altitudinis angulum instrumento repertum CAZ graduum 10.*

His

Digitized by Google

Astronomorum potuit invenire. In triangulo AXC dantur latera AX radius terræ, & XC constans radio AB, & montis altitudine BC, quæ supponitur esse 3 milliariorum Italicorum, & angulus X datur, nempè unius gradus, quia ex hyp. arcus AB est 1 grad. Ergo per prob. 10 cap. 3 reperitur angulus C, qui medius erit inter grad. 87. 9', & grad. 87. 8': quem primò assumamus grad. 87. 8' vero minorem. In triangulo isoscele AXB; quoniam X est 1 grad., erunt reliqui (a) XAB, XBA simul grad. 179; ac proinde unus (b) XBA grad. 89. 30'. Quare externus ABC (c) est grad. 90. 30'; huic adde ACB grad. 87. 8' vero minorem; erit eorum summa grad. 177. 38' verâ minor, quæ subtracta à grad. 179, relinquet (d) CAB grad. 2. 22' verò majorem. Deinde, quia antè ostensum est, XAB esse grad. 89. 30'; si hunc demas ab XAO, qui per prop. 16, aut 18. lib. 3 rectus est, remanet BAO 30'. Aufer BAO 30' ab CAB grad. 2. 22', qui verò major est, remanebit CAO grad. 1. 52' verò major. Jam, quia in triangulo rectangulo XAO dantur latus XA semidiameter terræ milliariorum Bononiensium 4169, & angulus X grad. 1, reperietur per prob. 3 c. 3 AO milliariorum Bononiensium 72. 7' 4" 9‴ 0 ᵛ 5ᵛ, pro qua assumamus milliaria 72. 7' 5" justa majorem. Cum hac igitur, & cum angulo CAO grad. 1. 52', etiam justo majori, in trigono AOF rectangulo (e) reperietur OF milliariorum Bononiensium 2. 3'. 6" 9‴ 3ᵛ. 6ᵛ. 7ᵛ', 5ᵛ'' vel (brevitatis causâ) 2. 3'. 7", verâ major, deficiens ab altitudine montis BC pedibus Bononiensibus 3150. Igitur vera OF

(a) 32. lib. 1.
(b) 5. lib. 1.
(c) 32. lib. 1.
(d) 32. lib. 1.
(e) per. 3. c. 3.

de-

Digitized by Google

deficit ab altitudine montis plus quàm 3150 pedibus, seu passibus 630.

Quod si deinde angulum C assumamus grad. 87. 9' justo majorem, eodem discursu facto, proveniet angulus CAO grad. 1. 51' verò minor, cum quo, & latere AO assumpto milliariorum Bononiensium 72, ac proinde justo minore (vera enim AO inventa est suprà milliar. Bon. 72. 7' 4" 9''' 0'v 5v) reperietur, per prob. 3 cap. 3 OF milliar. Bonon. 2. 3' 2" 4''' 8'v 8v, sive 2. 3' 2" minor verâ, ac proinde ab altitudine montis BC ex hyp. 3 milliariorum Bon. deficiens minus quàm 3400 pedibus Bonon., seu passibus 680.

Quare cum differentia altitudinum OF, BC sit major pedibus 3150, minor verò pedibus 3400 liquet, eam esse notabilem, cum excedat semissem unius milliaris Italici, hoc est plus quàm sextam partem altitudinis quæsitæ BC ex distantiâ unius gradus mensuratæ.

Si dicat quispiam, angulum CAO, sub quo altitudo montis ex unius gradus distantiâ spectabatur, esse nimis parvum, utpotè gradus 1. 52'; ac proinde casum hunc, in quo rotunditas terræ errorem causavit sensibilem, sub operationes Geometriæ Practicæ non cadere: sciat is, positâ majori altitudine montis, angulum quoque multò majorem futurum, & sensibilem nihilominus fore altitudinis collectæ OF defectum à verâ BC, retentâ eâdem, quâ prius, distantiâ unius gradus AB. Si enim altitudo BC sit milliar. Bonon. 6, & passuum 667, quæ minor est altitudine Alpium, & Pici in Teneriffa, eodem discursu, quem supra adhibui, reperies angulum CAO grad. 4. 43'; OF autem

mi-

minorem milliar. Bonon. 6 pass. 1, ac proinde deficientem ab altitudine verâ BC plus quàm passibus 666. Si BC sit milliariorum 10, & passuum 334, cui ferè æqualis est altitudo Pici, & Alpium, erit angulus CAO grad. 7. 32'; OF verò deficiet à CB plus quàm passibus 714. Si BC sit milliar. 14, quæ multò minor est altitudine montium Casei, Athos, Caucasi; erit angulus CAO grad. 11. 19'; OF verò deficiet ab BC plus quàm passibus 761.

Ex quibus manifestum est, cum distantia unum terræ gradum æquat, altitudinum ordinariæ dimensioni, licèt angulus obtineatur justæ quantitatis, nihilominus terræ rotunditatem sensibiliter officere; ac proinde verè dixisse Ricciolum, qui non immeritò proinde culpavit quosdam practicos Geometras, qui determinationem adeò necessariam, & curiosam vel ignoraverint, vel præteriverint.

PROBLEMA IX.

Altitudinem CB inaccessam metiri, cum statio altera in plano negatur. *Fig. 62.*

IN plano investigetur altitudinis angulus CAB. Deinde ex F summitate domus denuò investiga altitudinis angulum CFZ mensureturque mechanicè AF, & sit ex. gr. pedum 60. Intelligatur jam AL esse parallela radio FC, eritque angulus ALB æqualis angulo FCZ. Sunt autem & ABC, FZC æquales, utpote recti. Ergo & reliqui LAB, CFZ æquales sunt. Quia ergo AB est Sinus totus, & LB Tangens anguli LAB; etiam

LB

L B Tangens erit anguli C F Z. Est verò C B Tangens anguli C A B posito eod. sinu toto A B. Ergo C L, seu F A est differentia Tangentium angulorum altitudinis. Est igitur

Ut C L differentia Tangentium angulorum altitudinis C A B, C F Z	Ad Tangentem majorem	C B,
Ita C L, seu A F	Ad altitudinis stationum intervallum, quæ sit pedes 60 pedum	

Tria prima sunt nota. Ergo etiam innotescet quartum, altitudo turris quæsita C B.

Hæc praxis tunc solùm usui erit, cum altitudo B C non est tanta, ut requirat majorem stationis secundæ altitudinem A F, quàm quæ possit mechanicè mensurari.

Absque calculo.

Quot pedum datur altitudo stationis secundæ, tot partium scalæ fiat recta A F cui sit perpendicularis AO. Fiat deinde angulus OAS par angulo invento in statione primâ, ductâque F X parallelâ ad A O, fiat angulus X F Q par angulo in statione superiori invento; & latera A S, F Q concurrant in C. Ex C demittatur perpendicularis C Z concurrens cum A O in B. Inquire quot scalæ partes contineat C B: totidem quippe pedes continebit altitudo quæsita.

Triangula enim C F Z, C A B, per *prop.* 32. *lib.* 1. æquiangula sunt triangulis opticis, ac proin-

Digitized by Google

His ita constitutis, cadat primò A z *infrà* Ab*: Quoniam C A* z *est grad.* 10, *&* z Ab 30'*min., erit C*Ab *grad.* 9. 30' *: cum quo, & latere A*b 1000 *pedum in trigono rectangulo A*b *C reperietur* (a) *altitudo vera* b *C pedum* 167, 3' 4". *Jam in trigono rectangulo A* z X, *quia dantur rursum latus A* z 1000 *pedum, & angulus X A* z 10 *grad., reperietur* (b) *altitudo falsa* z *X pedum* 176. 3' 2". *Erroris ergo quantitas est fermè pedum* 8. 9' 8". *Quod si A* z *cadat suprà A*b, *eodem ratiocinio similiter reperietur erroris quantitas pedum* 9. 0' 1". *Itaque, posito licèt adeò crasso perpendiculi defectu, in casu primo error non æquat* 18 *partem altitudinis, in secundo nequidem vigesimam.*

(a) Prob. 3. cap. 3.

(b) per idem.

Quare cum distantia mensoris ab altitudine ea est, quæ altitudinis angulum quantitatis justæ exhibeat, puta non minorem 10 *gradibus, error quoque dimensionis magnus non erit. Nam, & defectum perpendiculi tantum assumpsimus, minutorum nempe* 30, *quantum non facilè accuratus mensor committet; & distantiam eam, quæ angulum satis efficeret parvum, videlicet* 10 *graduum; cum debeat, & facilè plerumque possit obtineri major, sub quo error adhuc multo insensibilior evadet: nam reliquis datis iisdem, si angulus altitudinis X A Z fuerit* 45 *grad. eodem discursu reperies, errorem non æquare* 56 *partem altitudinis veræ A*b, *cadente A* z *infrà parallelam A*b*: cadente verò suprà, nequidem* 58. *Ex quibus omnibus manifestum est, si cautè, & accuratè operemur, posse altitudines secùs ac nonnullis harum non sat peritis aliquando visum est; absque errore notabili, etiam*

me-

mediocri adhibito Instrumento, reperiri. Quod ipsum etiam ex sequentibus confirmabitur.

*Quod si angulus altitudinis Instrumento repertus, sit valde parvus, major evadet ac sensibilior error. Nam si reliquis datis omnibus iisdem, quæ supra, altitudinis angulus sit grad. 5; eodem scrutinio reperietur error major nona, sed minor octavâ altitudinis parte, cum AZ cadit infrà parallelam horizonti A*b*: cum vero Az cadit supra A*b*, error proveniet major undecimâ parte altitudinis, sed minor decimâ. Qui error cum ne ipse quidem adeò sit enormis, præsertim sub angulo altitudinis tam exili, videlicet grad. 5, & perpendiculi defectu posito tam crasso, 30' nempè minutorum; veritas eorum, quæ Paulò ante sunt dicta, ampliùs elucescit.*

*Ulterius tamen decrescente altitudinis angulo, prædictus error fiet intolerabilis. Reliquis enim datis manentibus; si altitudinis angulus sit grad. 3, & Az cadat infrà A*b*, proveniet error quinta parte altitudinis major: si 2 graduum, & Az etiam cadat infra A*b*, error tertiam excedet altitudinis partem.*

Pari ratione gravis evadet error, cum distantia mensoris tam exigua erit; ut angulus altitudinis proveniat valdè magnus, hoc est proximè accedens ad rectum. Nam datis iisdem, quæ supra, si altitudinis angulus fuerit grad. 88, error tertiam partem altitudinis excedet.

Ex hactenus dictis etiam confirmantur ea, quæ in Scholio Problematis 7 ostensa sunt, tutissimam nempè altitudinis dimensionem institui ex distantià mediocri, quæ exhibeat altitudinis angulum quam proximè gradum 45.

Nota

Nota *suppoſuiſſe me anguli altitudinis latus supernum, quod ab oculo menſoris per altitudinis apicem extenditur, debitum ſemper ſitum obtinuiſſe attendendo ſolùm ad ſitum vitioſum lateris inferni, à ſitu nimirum horizontali A B ſurſum deorſumve deflectentis. Is porrò oritur non ſolùm ex malâ diviſione graduum, aliove vitio inſtrumenti: ſed potiſſimùm, ut ſuprà expoſui, ex perpendiculi defectu. Cæterùm ut plena cognitio habeatur erroris qui ex vitio anguli in altitudinis ac diſtantiæ dimenſionem derivatur, conjungenda ſunt hoc Scholio dicta cum iis, quæ expoſui in Scholio Probl. 7, & in Scholio* Probl. 1. *num.* 1.

SECUNDA.

An diſtantiæ & Altitudines inacceſſæ; ex unicâ ſtatione poſſint menſurari.

P. *Clavius cenſuit poſſe, & praxim affert hujuſmodi. Quadrati Geometrici (hoc enim utitur) latus infernum QF dirige in altitudinis apicem C, per dioptras collimando. Oculo deinde translato ad quadrati centrum A per dioptras regulæ in eundem collima apicem C. Ita opticum habes trigonum rectangulum AQC, cui ſimile eſt in inſtrumento triangulum OSA: ac proinde eſt ut OS, ad SA, ita AQ (hoc eſt SA) ad QC. Cum ergo OS, & SA, ſint nota in particulis, in quas diviſum eſt latus SA; ac proinde ſciatur quoties OS contineatur in SA, innoteſcet etiam quoties AQ (quod ponatur eſſe unius pedis) contineatur in QC. Nota vero QC; & invento per periſma* 1. *altitudinis angulo* Fig. 67.

(a) Probl. 2. cap. 3.

gulo CQB, innotescent (a) altitudo CB, & distantia QB.

Hæc praxis non differt ab eâ, quam tradidi probl. 8, & 2. Nam si eam attentiùs expenderimus, comperiemus, non unâ statione rem absolvi, sed duabus. Prima enim statio fit in Q, & A ad reperiendum QC: altera deinde tantùm in Q, ut ex QC, & angulo CQA reperiantur CB, & QB. Intervallum porrò stationum est AQ latus Instrumenti; quod quia est exiguum, ac momenti propè nullius ad distantiam, nihil hac praxi efficitur. Quod sic ostendo.

Statuamus, QC distantiam ab altitudinis vertice esse 1000 pedum, valdè nimirùm moderatam; latus autem Instrumenti AQ pedis unius, quo majora vix esse solent ordinaria instrumenta. His datis, in trigono rectangulo AQC reperietur angulus ACQ (b) minor 4' minutis, qui angulus ad hoc negotium ob nimiam parvitatem inutilis est. Cum enim is par (c) sit sibi alterno SAO, erit etiam ille 4' minutis minor: unde fiet, ut regula insensibiliter distet à latere AS; ac proinde ipsa etiam SO insensibilis existat. Quare sciri non poterit, quot SO contineat particulas lateris AS, quod ad inventionem ipsius QC requirebatur. Quòd si latus instrumenti sit pedum 4, eademque retineatur distantia pedum 1000, angulus ACQ, hoc est SAO proveniet minor 15' minutis, qui ne ipse quidem sufficit, ut succedat dimensio. Si verò adhuc augere ultrà voluerimus instrumentum, & distantiam minuere, angulus quidem utcumque sensibilis obtinebitur, sed inutili prorsus dispendio, cum idem ille angulus

(b) Probl. 5. cap. 3.

(c) 27. lib. 1.

lus

proinde iis similia, suntque etiam per constructionem similiter posita. Quare cum A F referens intervallum stationum sit ex constructione tot partum scalæ, quot pedum erat ipsum intervallum stationum, necesse est, ut etiam C B tot partium scalæ sit, quot pedum est altitudo quæsita.

Eadem opera reperietur distantia A B.

PROBLEMA X.

Altitudinem montis, seu turris data distantia metiri.

Quando distantia montis, turrisve, sive æstimatione communi, sive aliunde est nota, expeditissima erit altitudinis dimensio. Tunc enim in triangulo rectangulo A B C nota est A B distantia, puta 2. milliarium latus unum; & angulus altitudinis C A B sit notus (*a*) instrumento. Ergo per *prop*. 3. *c*. 3. reperitur latus alterum B C, altitudo quæsita. *Fig*. 38. 39. 40.

(a) *Porif*. 1.

Absque calculo.

Fiat A B tot partium scalæ, quot passuum datur distantia A B: & fiat angulus B A S par angulo altitudinis per instrumentum invento. Ex B erigatur perpendicularis B Y concurrens cum A S in C. Inquire quot partes scalæ contineat C B: totidem enim passus continebit altitudo quæsita. *Fig*. 40.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA XI.

Altitudinem acceſſibilem metiri.

Fig. 38. 39 40.

ELige ſtationem A, cujus diſtantiam AB à turre BC applicatâ perticâ metiri commodè poſſis. Sit autem ea diſtantia mediocris juxta ea, quæ in ſcholio prob. 8 num. 1 determinavi. Inſtrumento deinde inveſtigetur angulus CAB, cum quo, & latere AB mechanicè jam noto innoteſcet latus (b) alterum BC latitudo quæſita.

(b) Prob. 3. cap. 3.

Idem ſolo baculo præſtare.

Fig. 63.

Baculus, ſive haſta *fl*, cujus exceſſus *lo* ſuprà menſorem *as* notus exiſtat ex. gr. trium pedum, ſolo defigatur perpendiculariter. Tum recede ex. gr. uſque in *as*, ſic ut per *l* extremitatem baculi collimans cernas B apicem turris: intervallum autem illud *ao*, ſeu *sf* metire mechanicè. Deinde ab oculo *a* intelligatur ducta *ao* X horizonti parallela; ac proinde perpendicularis ad *lf*, & BZ. Manifeſtum eſt, baculum *lo* altitudini BX parallelum eſſe. Unde per *Coroll.* 1 *prop.* 4 *lib.* 6.

Ut	AO diſtantia oculi ab haſtâ	Ad LO exceſſum haſtæ ſuprà menſorem:
Ita	diſtantia AX	Ad altitudinem incognitam BX

Atqui tria prima ſunt nota. Ergo etiam quartum ex his notum fiet.

Pe-

Digitized by Google

lis instrumento mediocri obtineri possit per stationes duas, quarum intervallum lateri instrumenti illius enormis sit æquale. Ex quibus manifestum est, hac methodo nihil ad praxim effici: aut siquid ob instrumenti insitatam magnitudinem effici contingat, id fieri non statione unicâ, quod petebatur, sed duabus, cum bis collimari debeat, in utraque videlicet lateris extremitate A, & Q; & quidem adhuc impensâ, ut dixi, superfluâ.

CAPUT VI.

Qua arte investigetur Ambitus; & Diameter Orbis Terræ.

HActenùs altitudines, & distantias in terrâ, aut circa terram positas dimensi sumus; majora jam aggredimur. Ambitum, & profunditatem terreni Orbis, altitudinem Lunæ, Solisque investigare deinceps erit propositum. Meritò semper omnibus ea investigatio admirabilis visa est. *Altitudinem Cœli* (inquit Siracides) *& latitudinem terræ, & profundum abyssi quis dimensus est?* & Plinius de Ptolomæo ita scribit: *vir ingens, supraque naturam mortalium, qui tantorum corporum magnitudines tam admirabili ratione comprehenderit.* Ut verò rerum adeò reconditarum scientia comparetur, non est necesse aut orbem ipsum circumnavigare, aut viam sibi ad centrum usque per interpositas terræ moles aperire, aut per immensa spatia in Lunæ, Solisve Cœlum conscendere. Unâ opus est duce Geometriâ, quæ eò absque funibus, & sca-

 lis,

lis, quò eniti aliàs nulla humana induſtria poſſit, ſuis illis Elementorum theorematis, quaſi quibuſdam alis inſtructa, penetrabit, omniaque arcana iſta proferet in lucem.

Ut rem ipſam aliquando aggrediamur; ex Aſtronomia ſuppono, molem ex terrâ, & aquâ compoſitam eſſe ſphæricam: quod, omiſſis aliorum demonſtrationibus, breviſſimè ſic oſtendo. Ubivis terrarum circumferentia horizontis viſum terminans apparet circularis. Hoc fieri non poſſet, ſi alterius eſſet figuræ moles terraquea quàm ſphæricæ, ut in ſphæricis demonſtratum eſt. Ergo moles terraquea eſt ſphærica.

PROBLEMA I.

Semidiametrum Orbis Terræ invenire.

Fig. 78. ELigatur Mons quiſpiam excelſus, ex quo liber pateat horizontis conſpectus, nullis aliis montibus, ſeu collibus impeditus. Aptiſſimus huic negotio Mons erit, ex quo liber ſit proſpectus in mare: illius enim ſuperficies æquabilis eſt, ac proinde viſibilem horizontis circumferentiam abſque impedimento præbet. Talis eſt Mons Æthna in Siciliâ, qui, & altiſſimus eſt, & longiſſimum exhibet in mare proſpectum. Montis igitur ejuſmodi altitudo ſit A B, quæ protracta tranſibit per terræ centrum Z. Altitudinem illam A B fac notam per *Probl.* 7, vel 8 *cap.* 5. Conſtitutus deinde in ejus vertice A metire per Poriſma 2 *cap.* 5 angulum C A B, quem radius ab oculo ad C ter-

terminum horizontis pertingens, ac proinde superficiem globi terraquei contingens, efficit cum ipsâ montis altitudine A B. Quod accuratè ut fiat, non sufficiet Quadrans magnitudinis ordinariæ, sed adhibendus est planè magnus, in quo præter Gradus notata sint Minuta prima, imò, & Decades saltem Minutorum Secundorum: qua ferè magnitudine instrumenti opus etiam erit suprà, ut altitudo ipsius montis A B reperiatur exactè. Et quia difficile est ob specierum ex distantiâ tantâ debilitatem determinare punctum in circumferentiâ horizontis distinctè visibile, captandus est ortus, occasusve alicujus Stellæ, vel Lunæ potiùs, aut Solis, cum ita jam infra horizontem deprimitur, ut solus margo extremus appareat: tunc enim in lucidum illius marginem collimando, eâdem operâ collimabis in punctum aliquod circumferentiæ horizontis, radiusque visualis A C terraquei globi superficiem præcisè tanget.

His ita constitutis: concipiatur ex Terræ centro Z ad contactum C emissa recta Z C. Ita triangulum habebitur C A Z, cujus latus unum Z C est Terræ semidiameter; alterum A Z ex A B altitudine Montis, & B Z semidiametro Terræ compositum; tertium A C radius visualis globum terraqueum contingens in C. In hoc triangulo, quia ex Z centro ad contactum ducta est Z C, erit angulus (a) Z C A rectus; ac proinde duo reliqui (b) A, & Z unum rectum conficiunt, seu 90 grad. Quare si gradus noti jam anguli A, qui ferè sunt grad. 87. 11'. auferamus à 90 gradibus, remanent gradus 2. 49' pro angulo Z. Ita angulus Z in ipso Terræ centro abditus innotescit. Jam quia

(a) *Per 18 lib. 3.*
(b) *Per 32. lib. 1.*

 tri-

trigonum Z C A rectangulum est, per *defin.* 9. *cap.* 2. respectu anguli Z erit CZ Sinus totus 100000, & A Z Secans, quæ ex tabulis datur 100120. Quare si C Z, seu Z B 100000 dematur ex Z A 100120, remanebit A B 120 nota in partibus Sinus totius C Z 100000. Sed eadem A B, altitudo nempè Montis etiam nota est in milliariis. Ergo

Ut A B 120 partes Sinus totius	Ad C Z Sinum totum 100000
Ita A B milliariorum 5	Ad milliaria incognita ..... semidiametri terræ C Z.

Cum igitur tria prima sint nota, innotescet etiam quartum, milliaria videlicet semidiametri Terræ, quæ quærebantur, quæ ex hoc scrutinio proveniet milliariorum Bononiensium $4166\frac{80}{120}$.

Huic indagini, quæ sanè ingeniosa est, initium dedit Maurolycus; cujus ratiocinatio primò rudior, (arcum enim C B, qui notabiliter curvus est, pro rectâ lineâ assumpsit) correcta, & exposita in hanc, quam proposui, formam evasit.

Semidiameter duplicata dabit totam diametrum, ex qua circumferentia ipsa; sive ambitus Terræ elicitur eo modo, quem tradidi in selectis ex Archimede in Scholio *prop.* 6, & tradam infra *lib.* 2 *cap.* 12 *Probl.* 3. Verùm quia etiam diameter elicitur ex circumferentiâ, utriusque seorsim, & immediatè reperiendi artificium omninò tradendum est, præsertim cum expeditior plerumque sit inventio immediata circumferentiæ, quàm diametri.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Orbis Terræ circumferentiam invenire.

PRimo loco proponam modum Eratosthenis Cyrenensis, sed correctum: subtilis est, & à Plinio, aliisque merito laudatus. *Fig.* 77.

Dimensurus igitur Eratosthenes ambitum Terræ hæc assumpsit. Primò, urbem Syenem esse sub Tropico Cancri: isthic enim scribunt Cleomedes, Plinius, & Strabo, in meridie Solstitii per 150 stadia circumquaque gnomones nullam umbram proiicere: addit Plinius, puteum isthic ejus rei gratia factum esse, cujus in meridie Solstitii totus fundus illustratur à Sole. Secundò, Syenem, & Alexandriam (has enim Urbes tanquam ad hoc scrutinium commodas elegerat) sub eodem sitas esse Meridiano: in quo quidem est corrigendus, cum Alexandria sit Occidentalior grad. 1. 30' min. Tertiò, distantiam Syenis ab Alexandria esse stadiorum 5000. Quartò, radios emissos ex Solis centro F, & extremitate diametri L in terram esse quoad sensum parallelos, in quo etiam corrigendus erit infrà. His positis, ut ex Cleomede refert Nonius, aliique, hunc ferè in modum ratiocinatus est.

Alexandria sit in *a*; Syene in B; Meridianus per utramque transiens X *a* B; centrum terræ Z, centrum Solis F, ejusque semidiameter terræ parallela L F. In *a*, nimirum Alexandriæ scaphium ita collocavit, ut gnomon *a o* perpendicularis esset ad superficiem terræ, adeoque productus transiret per terræ centrum Z *Fig.* 77.

Est porrò scaphium hemisphærium cavum, gnomonem habens *a o*, centrum apice suo attingens, & Quadrantes *a n*, *a* S in 90 gradus divisos. Tum in meridie Solstitii observavit quantitatem arcus *a c*, umbram nempè gnomonis *A o*, quam determinat radius L *o c* ab extremo Solis margine, seu extremitate diametri L per *o* scaphii centrum, & gnomonis apicem incedens, eumque reperit grad. 7. 12'. Jam quia Syene est sub Tropico Cancri, radium F B in Syenem è Solis centro directum in meridie Solstitii conclusit transire per terræ centrum Z, ibidemque concurrere cum gnomone *o a* Alexandriæ erecto, & efficere angulum F Z *o*. Ut hujus anguli quantitatem inveniret, assumpsit radios L *o c*, FBZ ob enormem Solis distantiam quoad sensum esse parallelos; ac proinde per *prop. 27. lib.* 1. angulum F Z *o* æqualem esse sibi alterno *c o a* grad. 7. 12'. Sed in eo falsus est Eratosthenes; non enim radii L *o c*, F B Z; sed F *o q*, FBZ, quoad sensum paralleli sunt, ut à Ricciolo demonstratum est *lib.* 3. *Almag. cap.* 27 *num.* 7, & *Geograp. lib.* 5. *cap.* 3. *num.* 3. ac proinde angulus F Z *o*, æqualis est angulo *q o a*, qui

(b) 15. *lib.* 1. priorem *c o a* excedit angulo *q o c*, seu (*b*) L *o* F, sub quo spectatur Solis semidiameter F L, qui est 15', aut 16' minutorum. Unde ipso *q o a*, adeoque, & F Z *o*, seu B Z *a* est grad. 7. 27', aut 28'. Quare etiam *a* B arcus Meridiani inter Alexandriam, & Syenem fuit grad. 7. 27', aut 28' min. Hinc cum Meridiani arcus *a* B grad. 7. 27'. ex assumpto 3 conficiat 5000 stadiorum, per regulam proportionum, 1 gradus conficiet stadia 671, vel correctione

adhi-

Digitized by Google

adhibitâ, (ex eo quod Alexandria, & Syene non sint præcisè sub eodem Meridiano) stadia 600, quæ multiplicata per gradus 360, producunt stadia 216000 pro totâ Meridiani circumferentiâ, hoc est ambitu orbis terræ.

Ut grad. 7. 27′	Ad stadia 5000
Ita grad. 1	Ad stadia .....

Quod si, ut valdè probabile est, stadia illa fuerint Alexandrina, 600 stadia debita uni gradui maximi terræ circuli efficient 72 milliaria Bononiensia, & stadia 216000 debita toti circumferentiæ, dabunt milliaria Bononiensia 25920, ut eruditè probat Ricciolus. Quoniam verò *cap.* 1 ostensum est milliare Belgicum, sive horarium esse triplum Bononiensis, unus gradus terreni ambitus, ex ratiocinio Eratosthenis ritè correcto, continebit milliaria Belgica 24: ambitus verò totus 8640.

PROBLEMA III.

Ambitum Orbis Terræ aliter investigare.

ELigantur duæ urbes *l*, *s* positæ sub eodem Meridiano, qui in cœlo sit CBFZ, in terrâ *q l s v*. Horizon urbis *l* sit CAZ; urbis verò *s* sit horizon XAR, puncta ipsis verticalia B, F. Distantia harum urbium *l s*, per *Probl.* 3. *cap.* 5 quàm accuratissimè fiat nota in milliaribus adhibito instrumento exquisito, & amplo; aut certè longo usu, & commeatione frequenti ea distantia sit nota; id quod, si urbes *Fig.* 79.

Digitized by Google

sint celebres, & una sit passim omnium æstimatio distantiæ, obtineri potest citra errorem sensibilem.

Notâ hunc in modum urbium assumptarum distantiâ *l s* in milliaribus, reliquum est, ut eadem quoque nota fiat in gradibus, quod ita fiet. Mensuretur C I altitudo poli urbis *l* suprà horizontem ejus CZ: similiter altitudo poli XI suprà horizontem XR urbis *s*. Minor XI subtrahatur à majori C I, & nota erit earum differentia CX. Quoniam ergo B C, F X æquales sunt, (sunt enim ambo meridiani quarta pars) ablato communi X B, erunt residui arcus CX, F B æquales. Quia ergo notus est C X, etiam BF notus erit; hoc est scietur, quot gradus contineat BF Meridiani cœlestis. Atqui tot gradus (c) continet meridiani terrestris *q l v*, arcus *l s*, quot gradus meridiani cœlestis continet B F. Ergo etiam noti sunt gradus *l s*, qui est distantia urbium *l*, & *s*.

(c) Cor. 3. prop 33 l. 6.

Hoc ipsum etiam per altitudines meridianas alicujus stellæ ita poterit obtineri. Eligatur stella quæpiam O, cujus altitudo meridiana Z O suprà horizontem CZ urbis *l* fiat nota; & nota fiat similiter altitudo stellæ O meridiana RO suprà XR horizontem urbis *s*. Tum, minore ZO subtractâ à majore R O, noti fient gradus arcus R Z: cui cum æqualis sit arcus B F (sunt enim rursum ambo arcus BZ, & FR quadrantes meridiani, adeoque æquales inter se: à quibus proinde dempto communi FZ, remanent B F, ZR etiam æquales) gradus quoque ipsius BF noti erunt. Ergò, ut suprà, noti erunt (*d*) etiam gradus *l* Z.

(d) Per idem.

Ponamus igitur arcum *l s*, sive hac metho-

do,

do, sive præcedenti repertum esse graduum 2; milliaria verò continere $144\frac{1}{2}$. Si gradus 2 efficiant milliaria $144\frac{1}{2}$: gradus 360, hoc est totus terræ ambitus, quot milliaria efficiet? Per regulam proportionum provenient milliaria 26010.

Hoc artificio usus est Possidonius Philosophus laudatus à Plinio, Strabone, & Cicerone, ille, cujus januæ Pompejus Magnus, cum ad eum audiendum accederet, Imperii fasces submisit. Usi sunt eâdem Alamon Rex Arabiæ, multique Arabes, Naucleri item recentiores ex longo navigandi usu rei maritimæ peritissimi; ex quorum observationibus debentur uni gradui milliaria Bononiensia saltem 70.

PROBLEMA IV.

Tertius modus indagandi Ambitum Orbis Terræ.

ELigantur duo loca *l*, *s* aliquot milliaribus horariis dissita, sive sint sub eodem Meridiano, sive non; quorum ea positio sit, ut eorum distantia *l s*, per Probl. 3. *cap.* 5, possit mensurari: quod fieri debet summâ curâ, & Quadrante amplo. Inveniatur deinde arcus B F verticalis circuli inter loci utriusque vertices B, & F interceptus, cujus inventionis quæ planè Astronomica est, modum tradere hujus loci non est. Notis gradibus arcus BF in cœlo, innotescunt etiam gradus totidem arcus *ls* in terrâ. Tum, ut suprà, ratiocinabimur: si tot gradus distantiæ *l s* efficiunt milliaria tot: gradus 360 quot milliaria efficient? Per regulam Tri- *Fig.* 19.

um

um prodibit numerus milliariorum toti circumferentiæ orbis terræ debitorum.

Hanc viam tenuit Joannes Baptiſta Ricciolus noſter. Elegit is diſtantiam inter villam Collegii noſtri Bononienſis ſitam in monte Serrâ propè Paternum, & Turrim Mutinenſem, quam juxta methodum *Probl.* 3. *cap.* 5. maximâ curâ, & induſtriâ dimenſus reperit paſſuum Bononienſium 21176, hoc eſt milliariorum Bononienſium 21 & paſſuum 176. Intervallum autem, quod ad hanc dimenſionem peragendam, applicatâ decempedâ, notum fecit, fuit paſſuum Bononienſium 1088 $\frac{2}{3}$, hoc eſt unius milliarii Bononienſis & paſſuum 83 $\frac{2}{3}$. Deinde arcum verticalis inter loca aſſumpta comprehenſum, exquiſitiſſimâ adhibitâ diligentiâ, & peritiâ pari, invenit 17′ 35″. Cum igitur 17′ 35″ unius gradus terreni efficiant milliaria Bononienſia 21 & paſſ. 178; gradus 360 quot milliaria efficient? per regulam Trium proveniunt milliaria Bononienſia 26010 pro tota terræ circumferentia: pro uno gradu autem 72 $\frac{1}{4}$.

Quanta demùm ſit tam circumferentia, quàm diameter Orbis terræ.

Viæ hactenus traditæ de ſe infallibiles ſunt, ſi opus præſcriptum fiat exactè. Verùm quia non omnes vel parem in obſervando peritiam, & cautelam, vel organa ſatis exquiſita attulerunt, factum eſt, ut in executione exactâ operis præſcripti variè fuerit peccatum à variis; atque inde nata ſententiarum de terræ ambitu varietas: quæ tamen ipſa tanta non erit, quantam ſibi perſuadent aliqui, ſi menſuræ diverſæ, qui-

Digitized by Google

quibus usi auctores sunt, ad unam aliquam revocentur. Ut igitur certum aliquid de quæstione propositâ definiamus, quando praxes ipsæ infallibiles sunt, oportebit inquirere quis eas fuerit accuratiùs executus. Non existimo, seu hac ætate, seu aliàs fortè unquam Ricciolo nostro ullum, sive peritiâ observandi, sive laboris assiduitate superiorem fuisse. Apparet hoc manifestè tum in toto ipsius opere Astronomico, tum in hoc ipso, quod agimus, negotio clarissimè cernitur. Quare facilè me induci patior, ut credam ab eo quàm proximè veram orbis magnitudinem assignari. Deprehendit ille, ut dixi suprà, in uno gradu maximi terræ circuli milliaria Bononiensia $72\frac{1}{4}$: quæ magnitudo maximè credibilis est non solùm propter insignem Riccioli in observando industriam, sed etiam, quòd, ut patet ex *Probl.* 2, ferè eadem deducatur ex Eratosthenis calculo emendato omnium celeberrimo; eamdemque astruant Massonus, & Kepplerus; ab eâ uno solùm milliari Bononiensi dissentiant Dionysiodorus celebris inter veteres Astronomus, & Gassendus inter recentiores Philosophus, & Astronomus planè eximius, & tantumdem ferè Oceani Navigatores moderni. Demus igitur uni gradui milliaria $72\frac{1}{4}$, quot nimirum à Ricciolo inventa sunt: si ea multiplicemus per 360 gradus, proveniunt milliaria Bononiensia 26010 pro totâ terræ circumferentia. Ex qua per ea, quæ tradidi in Archimede post prop. 6. invenitur diameter terræ mill. Bon. $8279\frac{85}{355}$.

Unus

		Continet *Mill. Bon.*	*Mill. hor.*
	Unus gr.	72 $\frac{1}{4}$	24 $\frac{1}{18}$
Orbis terræ	Circum.	26010	8640
	Diam.	8279 $\frac{85}{355} \cdot \frac{17}{71}$	2759 $\frac{53}{71}$
	Semid.	4139 $\frac{220}{355} \cdot \frac{44}{71}$	1379 $\frac{62}{71}$

Continet Pedes Bononienſes.

Ambitus terræ minutum	I.	6020 $\frac{5}{6}$
	II.	100 $\frac{25}{72}$
	III.	1 $\frac{281}{864}$

Atque has quidem dimenſiones ex omnibus ſentio quàm proximè ad veras accedere.

Sed quoniam ad multa utile eſt, hoc etiam adjungamus, quænam terræ circumferentia minima ſit earum, quæ ab Aſtronomis unquam ſint repertæ. Ea eſt Willebrordi Snellii, qui unì gradui tribuit milliaria Rhynlandica 19, hoc eſt Bononienſia 57, quæ ducta in 360 exhibent minimam terræ circumferentiam milliariorum Bonon. 20520, ex quâ elicitur diameter terræ minima milliar. Bonon. 6531 $\frac{255}{355}$

Orbis terræ	*Continet* *Mill. Bonon.*	*Mill. horar.*
Circum. minima	20520	6840
Diam. minima	6531 $\frac{255}{355} \cdot \frac{51}{71}$	2177 $\frac{85}{355} \cdot \frac{17}{71}$
Semid. minima	3265 $\frac{61}{71}$	1088 $\frac{44}{71}$

Cœterùm Snellii iſta dimenſio non admodùm probabilis eſt, quod ex nimis multis operationibus ſit compoſita, quarum errores ſingula-

rum

rum simul juncti errorem magnum possunt efficere. Ipsum consule in suo Eratosthene Batavo.

PROBLEMA V.

Amplitudinem horizontis ex altitudine oculi datâ visibilis invenire.

Altitudo oculi suprà terram, vel potiùs mare sit AO, per quam cogitemus secari globum terraqueum circulo maximo LBOC. Dein ab oculo A ducta intelligatur recta Tangens sphæricam terraquei globi superficiem in B. Manifestum est, ultra punctum contactùs B ab oculo A nihil videri ampliùs ex globo terraqueo. Quod si Tangens AB, fixo manente puncto A, concipiatur in orbem circumduci, sic ut perpetuò tangat; describet illa in terraquei globi superficie circuli circumferentiam BQCX in quâ visus circumquaque terminabitur; ac proinde definiet superficiem OBQCX, ab oculo A spectabilem; quæ quamvis reverà sit sphærica; tamen ob globi totius magnitudinem, cujus superficiei pars ipsa est perexigua, apparet instar plani circularis, cujus centrum sit punctum O oculo A directè suppositum: semidiameter verò arcus OB, seu OC, qui etiam ipse quoad sensum recta linea est. Hæc igitur jam explicata superficies Horizon dicitur, cujus amplitudo, arcus nimirum OB, vel totus COB hoc problemate inquiritur. Fig. 80.

Stans ergo quispiam in AO ad littus maris oculum habeat A suprà maris superficiem elevatum 6 pedibus, quanta esse solet statura ho-

minis

minus justa. Quæritur ad quantam distantiam ejus visio porrigatur, hoc est quanta sit longitudo à puncto O, cui pedibus insistit, usque ad punctum B, in quo radius visualis globum terraqueum Tangit.

Altitudo oculi AO concipiatur producta usquæ ad terræ centrum Z, & ex centro Z ad
Fig. 80. punctum contactus ducta semidiameter ZB. Per *prop.* 18.*lib.*3. ZB cum Tangente AB constituit angulum rectum, ac proinde trigonum ZBA rectangulum est, in quo latus ZB est semidiameter terræ, quæ per præcedens problema jam inventa est milliariorum Bononiensium 4139, seu pedum Bononiensium 20 (695,000: basis verò AZ composita est ex altitudine oculi AO 6 pedum, & OZ semidiametro terræ, adeòque est pedum Boniensium 20 (695,006. Ex his cognitis, per prob. 4. *cap.* 3. reperitur angulus AZB, seu OZB minutorum 2' 37" 2''' $\frac{371299,7052}{381348,0274}$, hoc est min. 2' 37" 3''' ferè. Cum ergo per prob. 4. uni gradui terrestris ambitus, sive minutis 60 debeantur milliaria Bononiensia 72.2' 5", hoc est pedes Bonon. 361250: minutis 2' 37" 3" quot pedes debentur? Per regulam Trium reperies minutis 2' competere pedes 12041 $\frac{2}{3}$; secundis 37', pedes 3712$\frac{65}{72}$; tertiis 3, pedes 5 $\frac{11}{184}$. Horum summa facit pedes Bononienses 15759 $\frac{99144}{186654}$, & tantus est arcus OB, trium videlicet milliariorum Bononiensium & pedum Bononiensium 759, hoc est paulò major uno milliari horario.

Quod si altitudo oculi detur unius milliarii Bononiensis, eodem ratiocinio reperietur arcus OB major grad. 1. 16'; minor verò grad. 1.17', ac proinde OB quàm proximè erit milliariorum Bononiensium 91.

Ali-

Digitized by Google

Aliter.

Quoniam pulchra est hujus rei disquisitio, eam placet aliâ adhuc viâ scrutari. Fig. 80.

Ponatur rursum altitudo oculi esse 6 pedum. Quia radius AC tangit globum terræ; erit (a) rectangulum LAO æquale quadrato AB. Rectangulum porrò LAO notum est. Nam per prob. 4. LO terræ diameter continet milliaria Bononiensia 8279 $\frac{57}{71}$, hoc est pedes Bononienses 41391197 $\frac{13}{71}$, quibus si addas AO pedes 6, oculi nempè altitudinem, fiet tota LA pedum 41391203 $\frac{13}{71}$. Hac ductâ in AO ped. 6. producitur rectangulum LAO, hoc est (ut jam ostendi) quadratum AB, pedum quadratorum Bon. 248347219 $\frac{9}{71}$. Quare radix quadrata hujus numeri exhibebit pedes Tangentis AB. Radix porrò illa major est quàm 15759, & minor quàm 15760. Igitur Tangens AB (hoc est OB; differunt enim insensibiliter) est pedum 15759, & particularum aliquot unius pedis, planè quanta fuit priori methodo inventa.

(a) Per 36. lib. 3.

Porrò, Tangentem AB non excedere sensibiliter arcum OB, sic ostendes: angulus BAZ ex praxi primâ reperitur grad. 89. 57' 22'' 57'''. Sed demus, eum esse justo minorem, nempè grad. 89. 57' 20'': ducaturque BX perpendicularis ad AL: erit BX Sinus anguli BAX grad. 89. 57' 20'' ad AB Sinum totum, ut 9999996991 ad 10000000000, quorum differentia 3009 nequidem est pars millionesima ipsius AB 10000000000. Quare cum arcus OB major sit perpendiculari BX, patebit de hoc intentum à fortiori.

Ca-

Cæterùm hæc via adhiberi solum potest quando altitudo non est tanta, ut OB arcus horizontis ob magnitudinem suam non sit sensibiliter curvus, ac proinde sensibiliter minor Tangente AC: Tunc enim solus adhiberi debet modus præcedens.

Scholium.

Fig. 81. *Quo altitudo oculi fuerit major, eò etiam major terraquei globi portio spectabitur; quæ tamen necessariò semper minor erit parte dimidiâ, seu emisphærio, quantacumque fuerit oculi distantia. Quod, quamvis ad Opticam pertineat, placet tamen hic obiter demonstrare.*

Data sit sphæra oculo major, o F q b, & oculus in C ab eâ quantumcumque distans. Ab oculo C emissi radii tangentes in F, & L determinent portionem visam F Q L. Dico, eam esse hemisphærio minorem. Ex centro enim ad contactus F, L ducantur rectæ A F, AL, (a) 18. lib. 3. *& ad oculum recta A C. Quia* (a) *AFC rectus est, F A C necessariò* (b) *acutus est.* (b) Coroll. 5. p. 32. l. 1. *Similiter quia A L C rectus est, erit L A C acutus. Ergo duo acuti simul F A C, L A C non efficiunt duos rectos, sed obtusum angulum F A L duobus rectis minorem, ac proinde F A, L A non sunt una recta, sed inclinantur versus oculum C. Ducatur ergo per A centrum recta o A b: hæc determinat hemisphærium o Q b; unde portio visa F Q L à radiis tangentibus inclusa minor est hemisphærio.*

Si duobus oculis sphæram intueamur, supponitur, diametrum esse majorem intervallo oculorum.

PRO-

PROBLEMA VI.

Ex quantâ distantiâ vertex alicujus montis, aut summitas mali navis conspici possit.

AD solutionem problematis determinanda insuper est altitudo oculi. Fig. 84.

Altitudo montis, aut malus navis sit C F, à cujus vertice C ducta concipiatur recta globum terraqueum tangens in B. Si oculus statuatur in ipsâ terræ, seu maris superficie, manifestum, ob terræ, ac maris rotunditatem non posse cerni apicem C ultra punctum B, ex. gr. in O. Quod si oculo detur altitudo aliqua O A suprà terræ, aut maris superficiem, poterit videri apex C etiam ultra contactum B ab oculo existente in puncto aliquo A Tangentis C B productæ.

Quæritur ergo quantus sit arcus F O. Id verò ex problemate præcedenti in promptu est invenire. Per hoc enim reperietur arcus F B Tangentis CB: item arcus O B Tangentis A B: qui juncti dabunt arcum quæsitum F O. Quare si F C sit altitudo unius milliaris Bononiensis, reperietur arcus F B milliariorum 91; & si A O sit pedum 6, reperietur arcus O B milliariorum 3 pedum 759. Quare totus arcus FO erit milliariorum 94 ped. 759: ac proinde ex tanto intervallo oculus 6 pedes altus spectabit præcisè apicem montis alti uno milliario Bononiensi.

Quod si major oculo detur altitudo, ex majori etiam distantiâ poterit conspicere summitatem altitudinis datæ.

Digitized by Google

Corollarium.

Ex his poterimus colligere, quanta sit distantia nubium apparentium in margine horizontis.

CAPUT VII.

Ex inventâ semidiametro terræ prodigiosæ quorumdam montium altitudines demonstrantur.

EXistimavit *Keplerus*, aliique, altissimos montes non attolli ultra 2, aut 4 milliaria Italica. Quantoperè fallantur, ex iis, quæ subjungam, fiet manifestum. Artificium metiendi altitudines montium tradidi *cap.* 5 *prop.* 7, & 8. Verùm, deficere illud, cum mensoris à monte distantia unum gradum adæquat, demonstravi in scholio 8 problematis. Atqui tanta, & major erit assumenda, ut montium quorundam prodigiosam altitudinem investigemus. Quare alia metiendi ratio, cui non officiat terræ rotunditas, à Ricciolo excogitata est, sed quæ inventam prius terræ semidiametrum supponat: neque enim alia superest via, qua scrutari dictorum montium altitudines possimus.

PRO-

PROBLEMA I.

Altitudinem montis inaccessi AB datis semidiametro terræ, & alterius montis altitudine OC invenire.

Oportet autem altitudinem montis O C, quæ datur, esse notabilem. Mensuretur in pede montis dati angulus A O C, & in montis vertice angulus A C O: quod quomodo fieri debeat, apparet in figura 83: instrumento enim (ut isthic expressum est) collocato, abscissus à perpendiculo arcus *x o* manifestat angulum *c o a* (sunt enim ob parallelas *k x*; *c o* alterni *x k o*, & *c o a* (*a*) æquales) arcus verò *n s* indicat angulum *o c s*, qui additus recto *s c a* manifestat totum *a c o*. Quoniam igitur in triangulo OAC dantur anguli COA, ACO, & latus CO; ex his innotescet (*b*) latus AC. Deinde quia in triangulo ACZ notus jam est angulus C, & latus AC; itemque latus ZC notum est (nam ZO est semidiameter terræ, quæ inventa est *cap. præc.*, est verò OC altitudo montis data), ex his, (*c*) elicietur ZA: à qua, si demas ZB semidiametrum terræ, nota relinquetur AB altitudo montis quæsita.

Fig. 82.

(a) 27. *l.* 1.

Fig. 82.

(b) *Prob.* 9. *cap.* 3.

(c) *Prob.* 10. *cap.* 3.

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Altitudinem montis CF, cujus vertex C in margine horizontis appareat, datâ ſemidiametro terræ, & menſoris ab eo diſtantiâ OF, invenire.

Fig. 84. MEnſor exiſtat in AO. Radius ab oculo globi terreni ſuperficiem tangens, atque inde ad C verticem montis FC pertingens, eſto ABC, terminus igitur horizontis ab oculo A viſibilis eſt contactus B, cujus amplitudo OB reperitur per prob. 5 *cap. præc.* qua ſubtractâ à dato arcu, ſeu diſtantiâ OF, notus relinquitur arcus F, B, ac proinde, & angulus CZB. Continuentur deinde altitudines montis CF, & oculo AO uſque centrum Z: à quo ad contactum B ducatur ZB per *prop.* 18 *lib.* 3 angulus CBZ rectus eſt. Quoniam ergo in trigono rectangulo CBZ dantur angulus CZB, & latus ZB terræ ſemidiameter, quæ *cap. præc.* reperta eſt; ex his (*f*) invenietur ZC: à qua ſi demas terræ ſemidiametrum ZF, nota relinquetur altitudo montis quæſita CF.

(f) *Probl.* 3. *cap.* 3.

PROBLEMA III.

Inquiritur altitudo Æthnæ.

Fig. 84. REferunt Maurolycus, & Melitenſes, Æthnam conſpici ex inſulâ Melitâ, & ultrà, ex diſtantiâ milliariorum 216. Hoc dato, Al-

Digitized by Google

Altitudo Æthnæ colligitur milliariorum Italicorum Bononiensium 5 $\frac{42209}{100000}$.

Ponantur, & construantur eadem, quæ in problemate præcedenti, sitque altitudo Æthnæ F C, & oculus spectatoris in Melita esto A: altitudo autem oculi A O sit pedum 6. Igitur O B amplitudo horizontis reperitur (*g*) milliariorum Bononiensium 3 pedum 759, qui hìc poterunt contemni. Quare si arcum O B 3 milliariorum demas ab arcu, seu distantià O F, quæ ex hyp. est milliariorum 216, restat arcus B F milliariorum 213. Jam si milliaria 26010, quantus *cap. præc. prob.* 4 totus terræ ambitus esse ostensus est, efficiunt gradus 360, milliaria 213 arcus B F quot efficient? per regulam trium proveniunt pro arcu B F gradus 2 min. 56, & 88 centesimæ unius minuti. Sed demus justo minus arcui B F, adeoque & angulo C Z B: nempè grad. 2. 56′ Secans grad. 2. 56′ est 100131 posito Sinu toto 100000. Quoniam igitur per prob. 3 cap. 3 est

(*g*) *Prob.* 5. *cap.* 6.

Ut Sinus totus 100000	Ad Secantem anguli CZB grad. 2. 56′. 100131
Ita Z B semidiameter terræ milliariorum 4139	Ad Z C milliariorum......

Per regulam trium reperitur Z C milliariorum 4144 $\frac{42209}{100000}$. Ab hac si auferas Z F semidiametrum terræ milliariorum 4139, relinquitur C F altitudo Æthnæ milliariorum Bononiensium 5 $\frac{42209}{100000}$: à qua detrahere aliquid

Digitized by Google

oportet, ut compenſetur refractio, quæ fortè intervenit, & altitudinem verâ majorem facit.

PROBLEMA XI.

Inquiritur altitudo Pici.

PIcus mons eſt rupes altiſſima inſulæ Teneriffæ, quæ una eſt ex Fortunatis, ſeu Canariis. Hujus altitudo tanta eſt, ut ſub ejus Meridiano tam versùs Auſtrum, quàm Boream navigantibus appareat ex diſtantia 4 graduum, hoc eſt 289 milliariorum Italicorum, & ex inſulâ Materiâ, quæ ab eo diſtat grad. 4. 10', cacumen ejus inſtar alicujus templi conſpiciatur. Ita Cadamuſtus, Joannes Hugonis, Snellius, Furnerius noſter. Hoc dato,

Altitudo Pici demonſtrabitur æquare 10 milliaria Bononienſia ut minimum.

Fig. 84. Picus eſto CF, oculus A altus pedes 6; cætera ponantur, ac ordinentur ut in præcedentibus. Arcus, ſeu diſtantia ex obſervatione eſt grad. 4. 10'; hoc eſt 300 milliariorum Bononienſium, imò longè major: cum enim Picus ex eâ diſtantiâ inſtar templi appareat, haud dubiè adhuc longè ultra Materiam inſulam ſpectaretur. Sed demus arcui OF ſolùm gradus 4. 10'. Arcus OB per prob. 5 *cap. præc.* eſt grad. 0. 2' 37" 3"', quæ ablata ab arcu OF grad. 4. 10', relinquunt arcum FB, adeoque & angulum CZB graduum 4. 7' 22" 57"' juſto minorem; in quo etiam ſecunda, & tertia negligemus. Porrò Secans anguli CZB grad. 4. 7' eſt 100258. Quoniam igitur per prob. 3. cap. 3. eſt

Ut

Ut Sinus totus 100000	Ad Secantem anguli CZB gr. 4.7', nempè 100258
Ita ZB semidiameter terræ milliariorum 4139	Ad ZC

Per regulam Auream reperitur ZC milliariorum Bononiensium $4149\frac{67562}{100000}$. Ab hac si demas semidiametrum terræ ZF milliariorum 4139, relinquitur CF altitudo Pici mill. Bonon. $10\frac{62562}{100000}$, quæ longè est minor verâ, quòd arcum FB sumpserimus multò minorem vero. Quare, si hoc defectu compensemus augmentum altitudinis à refractione causatum, remanent pro altitudine Pici milliaria saltem 10.

PROBLEMA V.

Altitudo Caucasi inquiritur.

HUjus montis altitudo jure meritò incredibilis videretur, nisi fidem demonstratio extorqueret. Caucasus mons situs in Asiâ ultra mare Caspium longissimo tractu in Ortum, & Septentrionem porrigitur. Hujus montis summitates Aristoteles scribit *lib. 3. Met. textu* 63 videri à locis, quæ vocantur profunda, & à navigantibus in stagnum; hoc est ex eo tractu Ponti Euxini, ubi Palus Mæotis in Euxinum influit. Ea porrò secundùm Ptolomæum est distantia grad. 9.32'. Hoc dato,

Altitudo Caucasi complectitur saltem millia-

ria Italica 51; hoc eſt, plus quàm 16 milliaria Belgica, ſeu horaria.

Fig. 84. Repetito enim diſcurſu præcedentium problematum, altitudo Caucaſi eſto CF, oculus A. Ab arcu, ſeu diſtantiâ OF, quæ datur grad. 9. 32', ſi demas OB arcum horizontis viſibilis, qui eſt per *prob. 5. cap. præced.* grad. 0. 2' 37'' 3''' ; remanet arcus BF grad. 9. 26' 22'' 57''' cujus Secans (ſecundis prætermiſſis) eſt 101370. Quia igitur per *prob. 3. cap. 3* eſt,

Ut Sinus totus 100000	Ad anguli CZB grad. 9. 29' Secantem 101370;
Ita ZB ſemid. terræ milliar. 4139	Ad ZC,

Per regulam Trium reperietur ZC milliariorum Italicorum 4195 $\frac{32515}{100000}$, à qua ſi demas ſemidiametrum terræ ZF milliar. 4139, relinquuntur pro altitudine Caucaſi CF milliaria 57 $\frac{32515}{100000}$: ac proinde excedit milliaria 57.

Hinc verò oportebit aliquid ſubtrahere, ut compenſetur augmentum à refractione inductum, quod cum 6 milliaria non excedat, manet Caucaſi altitudo 51 milliariorum Bononienſium.

Non abſimili diſcurſu reperietur altitudo montis Athos, quem Xerxes perforaſſe fertur, ut per ipſum mare tranſmitteret, milliariorum 28; & Caſius Siriæ milliariorum ſaltem 20.

Scho-

Digitized by Google

Scholium,

Possunt etiam ex longitudine ascensus, & descensus altitudines montium æstimari. Ascensum, ac descensum Alpium scribit Polybius complecti stadia 1200, quæ milliaria efficiunt Italica 150. Demus igitur ascensui soli dimidium hujus itineris, milliaria nempè 75. Altitudinem Alpium repræsentet AB ad horizontem CA perpendicularis. Quia verò non ubique eadem viæ, qua ascenditur, inclinatio est, sed uno loco præceps magis, quàm altero; statuamus æquatione factâ, eam ubique uniformem esse secundùm rectam lineam CB, quæ cum horizontali CA efficiat inclinationis angulum BCA grad. 7. 40'. Quæ sanè modica censeri inclinatio debet: ac proinde & altitudo BA inde collecta minor justâ. Quoniam igitur in triangulo rectangulo BAC datur CB 75 milliariorum, & angulus C grad. 7. 40' ex his per prob. 2. cap. 3 reperietur AB altitudo Alpium quæsita major 10 milliariis. *Fig. 85.*

Unde meritò concluditur, Alpium altitudinem milliaria 10 excedere.

CAPUT VIII.

Quo artificio Lunæ à Terra distantiam Astronomi investigaverint.

AD hujus problematis maximè ardui solutionem præter subsidium Trigonometricum opus est notitiâ Parallaxeos, de qua proinde pauca hìc ex Astronomiâ erunt præmittenda.

Quid

Quid Parallaxis.

Variæ ſunt Parallaxium ſpecies. Nos hìc de eâ ſolâ agimus, quæ fit in circulo altitudinis, ſeu verticali. Parallaxis igitur eſt angulus, quem in centro Aſtri efficiunt duo radii, quorum unus ducitur ex centro Terræ, ſeu mundi, alter ab oculo in ſuperficiæ Terræ poſito.

Fig. 87. Centrum Aſtri eſto C, verticalis circulus per illud tranſiens ZCO, oculus in ſuperficie Terræ in B, Terræ centrum A. Angulus BCA eſt Parallaxis Aſtri C. Vocatur etiam Diverſitas aſpectus, quia exiſtens in B videt Aſtrum C quaſi ſuppoſitum firmamenti puncto F; exiſtens verò in centro A idem Aſtrum C videt ſuppoſitum firmamenti puncto diverſo L.

Quod ſi Aſtrum exiſtat in O, in margine videlicet Horizontis viſibilis, quem determinat Tangens BO, vocatur Parallaxis horizontalis, eſtque angulus AOB. Commodior ea eſt ad inveſtigandam Aſtri diſtantiam, quod triangulum ABO rectangulum ſit, ut patet ex *prop.* 18. *lib.* 3.

Non eſt autem hujus loci modum tradere, quo Parallaxeos magnitudo inveniri debeat: id enim ad profundiorem pertinet Aſtronomiam, eſtque inter conatus Aſtronomicos unus è difficillimis. Vide *lib.* 3. *Aſtronomiæ noſtræ cap.* 2, ubi inventionem ab ipſis trado fundamentis.

PO-

Digitized by Google

PORISMA.

Quò Parallaxis major est, eò Astrum Terræ vicinius est; quò minor, eò remotius.

Sit Astrum demissius unum in O, alterum altius in Q, quorum Parallaxes sint anguli BOA, B Q A. Angulus B O A externus est respectu trianguli A O Q. Ergo B O A æqualis est utrique (a) interno opposito O Q A, O A Q; ac proinde major solo O Q A, sive B Q A. *Fig.* 87.

(a) 32. *lib* 1.

PROBLEMA I.

Distantiam Lunæ à Terra inquirere.

SEmidiameter Horizontis Visibilis esto B *o*; Lunæ centrum *o*, ejusque Parallaxis B *o* A. Ex Astronomis recentioribus, qui longè majori industriâ in hoc negotium incubuere, quàm veteres, nullus unquam deprehendit (*a*) Parallaxim Horizontalem Lunæ tantam, quæ æquaret grad. 1. 8′. Verùm assumamus tantam Parallaxim: sic enim (*b*) certò constabit, veram Lunæ distantiam semper longè majorem esse eâ, quæ ex Parallaxi assumptâ colligetur. Quoniam B semidiameter Horizontis tangit superficiem Terræ in B, & ad contactum B, ducta est ex centro A recta A B; erit angulus AB *o* (*c*) rectus; ac proinde trigonum Parallacticum est rectangulum. Ergo (*d*) A *o* est Sinus totus, nempè 100000, AB Sinus anguli *o*, grad. 1. 8′, qui ex Canone Sinuum datur 1977. Divide AC 100000 per AB 1977: reperies hanc ab illâ con-

Fig. 88.

(a) *Vide Astron. l.* 3 *uum.* 12.

(b) *Per porisma.*

(c) 18. *lib.* 3.

(d) *defin.* 6. *cap.* 2.

Digitized by Google

contineri plus quàm quinquagies, ac proinde AC distantiam Lunæ à Terræ centro majorem esse 50 semidiametris terrenis A B. Atqui hæc distantia deducta est ex Parallaxi nimis magnâ, grad. 1. 8', quantam videlicet nullus è posterioribus Astronomis repererit. Ergo

(o) Per porisma.

Certum (o) est, distantiam Lunæ à Terræ centro semper majorem esse 50 semidiametris Terræ; hoc est milliariis Bononiensibus 163250, sive horariis 154400.

Milliaria deduxi ex semidiametro terræ omnium hactenus inventarum minimâ, milliariorum Bononiensium 3265, sive horariorum 1088.

PROBLEMA II.

Lunarium montium altitudinem inquirere.

Fig. 86.

SUperficiem Lunæ non æquabilem esse, sed asperam montibus, ac rupibus, certissimâ observatione constat. Vide ipse tubo optico longiori duobus vitris convexis instructo in obscuro Lunæ hemisphærio *a f c* apicem quemdam *b* luce clarâ micantem longè ultra *a*, ubi lucis, ac tenebrarum confinia sunt. Id ipsum ab aliis quoque Astronomis observatum. Ex quo manifestissimè convincitur, apicem illum in tenebroso Lunæ hemisphærio micantem necessariò esse verticem alicujus montis *o b*, qui ob altitudinem suam priùs illustretur à Sole, quàm partes Lunæ humiliores *a o*. Complures autem ejusmodi esse montes in Lunâ eodem indice tubo evidenter cognoscimus: si enim limbus extremus Lunæ non-Plenæ observetur, is appa-

parebit quasi dentatus, & tamquam rupibus continuis intercisus. Vide de his plura Astronomiæ nostræ *lib.* 8 in tractatu de luce,& maculis Solis,ac Lunæ *num.* 5.

Unum ex his montibus, quem *S. Catharinæ* appellant, observavit Ricciolus, comperitque illius verticem illustratum *b* distare à confiniis lucis,& umbræ $\frac{1}{16}$ parte diametri. Eam distantiam repræsentet recta *b a*, quam supponamus tangere Lunæ superficiem in *a* extremitate diametri *a c*, & continuetur *b o* altitudo montis usque ad centrum Lunæ z. Per *prop.* 18. *lib.* 3 angulus *b a* z rectus est. Ergo quadratum *b* z quadratis (a) *b a*, z *a* æquale est. Quoniam verò *b a* (b) est 1, & *a* z 8, erit quadratum *b a* 1, & quadratum z *a* 64, quorum summa 65 æqualis jam ostensa est quadrato *b* z. Quare si ex eâ summâ 65 extrahatur radix quadrata, nota fiet *b* z, eritque 8. 0' 6'' 9''', à qua, si demas 8 semidiametrum z *o*, remanebit *o b* altitudo montis Lunaris 69 millesimæ, quarum z *a* est 8.

(a) 47. *lib.* 1.
(b) *ex obser.*

Quare,cum semidiameter Lunæ (ut (*b*) alibi ostendam) major sit milliariis Bononiensibus 711; si fiat per regulam proportionum, ut 8 ad 69 millesimas, ita milliaria 711 ad alium numerum milliariorum: erit is major quâm 6 milliaria, debitus monti *o b*, ac proinde

(b) *in Coroll. prob.* 8. *cap.* 20.

Certum est o b *altitudinem montis Lunaris altiorem esse* 6 *milliariis Bononiensibus*.

CA-

Digitized by Google

CAPUT IX.

Qua via indagari possit distantia Solis à Terra.

DUabus maximè viis hujus tam ardui problematis solutionem Astronomi sunt aggressi, videlicet per umbram Terræ in Eclipsibus, & Lunæ Dichotomiam. Priore usus est Ptolomæus, & Astronomi post illum plerique omnes. Alteram primus aperuit Aristarchus Samius, quam ex recentioribus instaurarunt *Keplerus*, ac Vendelinus, & excoluit præ omnibus Joannes Baptista Ricciolus noster. Hanc postremam, quia est priore illâ multò certior, etiam nos tenebimus, nonnullis ad clariorem rei intelligentiam præmissis.

Dichotomia Lunæ idem est, ac Lunæ bisectio. Tunc autem Luna dichotoma, seu bisecta dicitur, cum nobis apparet dimidiata, sive instar semicirculi. Pro quo notandum ex Opticâ. Primò, quia Sol Lunâ major est, Lunæ portionem à Sole illuminatam semper majorem esse dimidiâ; sed ob ingentem distantiam excessum esse tam modicum, ut dimidia appareat. Secundò, partem visam Lunæ, aut corporis alterius cujuscumque oculo majoris semper esse minorem dimidiâ (quod etiam in *scholio probl. 5. cap. 6* demonstratum est). Verùm, cum distantia est valdè magna, defectum esse adeò parvum, ut quoad sensum pars visa censeri possit dimidia. Tertiò, quamvis Solis, ac Lunæ superficies sint sphæricæ, ob immanem distantiam apparere tamquam planas instar circuli.

Digitized by Google

culi. Unde fit, ut, cum pars Lunæ illuminata à nobis tota conſpicitur, plana appareat inſtar circuli, & cum nobis conſpicitur biſecta, appareat inſtar ſemicirculi.

PORISMA I.

Cum Luna nobis apparet biſecta, planum *boc* ſemicirculum lucidum *bzc* ab obſcuro *bxc* diſcriminans productum tranſit per *o* centrum Lunæ, & oculi centrum A; & recta linea *o* S centra Lunæ, Soliſque jungens ad rectam A *o* perpendicularis eſt. Fig 89.

Primum per ſe ſatis clarum eſt. Alterum ſic oſtendo. Cum planum ſeparans partem obſcuram à lucidâ tranſeat per *o* centrum Lunæ, & A centrum oculi; patet rectam A *o* eſſe in plano ſeparante. Atqui recta S *o* ad planum ſeparans perpendicularis eſt; quia pars illuſtrata *bzc*, adeoque & baſis ejus, ipſum nempè planum ſeparans, directè ſemper Soli obvertitur. Ergo etiam S *o* ad rectam(*o*) A *o* in plano ſeparante poſitam, perpendicularis eſt.

(o) Per defin. 3. 11.

PORISMA II.

Quò Sol fuerit à Terrâ remotior, eò major erit Lunæ, cum nobis biſecta apparet, diſtantia à Sole; & contra. Quantacumque tamen eſſet diſtantia Solis à Terrâ, ſemper tamen ejus à Lunâ, dum biſecta apparet, diſtantia minor erit gradibus 90, ſeu quadrante circuli.

I. Pars

Digitized by Google

I. Pars demonstratur.

Fig. 89. Oculus in Terrâ esto A; Lunæ centrum in *o*; Solis in S. Ducantur radii A S, *o* S; & Lunæ diameter *b c* semicirculum lucidum ab obscuro separans juxta porisma 1 transeat per oculum A. Producatur deinde *o* S in infinitum, inque ejus puncto altiori F intelligatur constitui centrum Solis ducaturque A F. Sole posito in S, distantiam ejus à Lunâ bisectâ metitur arcus *oq*; seu angulus *o* A S: Solis, verò constituti in loco altiori F distantiam à Lunâ dichotomâ metitur arcus *o i*, sive angulus *o* A F, qui cum priori major sit, patet 1 pars porismatis.

II. Pars demonstratur.

In rectâ *o* S infinitè productâ sumatur punctum F quantumcumque distans à Terrâ A, ducaturque radius A F. Per porisma 1 in triangulo A *o* F angulus ad *o* rectus est. Ergo per *prop.* 32. *lib.* 1. F A *o* est minor recto, seu gradibus 90. *His præmissis esto*

PROBLEMA I.

Distantiam Solis à Terra inquirere.

Fig. 89. OCulus in terrâ esto in A; huic Luna apparens bisecta instar semicirculi *b z c*, cujus diameter *b c* producta per porisma 1 transibit per oculum A. Centrum Solis sit in S, ad quod ab oculo, & centro Lunæ ducantur radii A S, *o* S. Atque ita habemus triangulum Dicho-

to-

tomicum A S *o* à tribus radiis centra oculi, Solis, Lunæ connectentibus comprehensum. In hoc triangulo Dichotomico angulus A *o* S per porisma 1 rectus est. Quare, si notus fiat acutus S A *o*, qui metitur distantiam Lunæ bisectæ à Sole, etiam proportio laterum per *prob.* 1. *cap.* 3 innotescet. Atqui in hujus anguli inventionem summo studio Astronomi incubuere, quorum nullus jam inde ab Aristarcho eum deprehendit minorem gradibus 87, quin verò est manifestò major. Assumatur tamen graduum 87, sic enim ex porismate 2 certò constabit, altitudinem Solis inde collectam esse verâ minorem. Quoniam igitur in trigono rectangulo A *o* S acutus S A *o* est grad. 87, erit (*b*) alter *o* S A grad. 3, cujus Sinus est 523360. Quare cum *o* A sit Sinus (*c*) anguli *o* S A: A S verò Sinus totus; erit latus A *o* 523360 partium, quarum A S est 10000000. Divide 10000000 per 523360: comperies, A S distantiam Solis à Terrâ continere Lunæ à Terrâ distantias A *o* $19.\ 0'\ 0''\ 0'''\ 5^{iv}\ 6^{v}\ 7^{vi}\ 9^{vii}$. Et quoniam ostendi suprà (*d*), distantiam Lunæ minimam à Terrâ excedere 50 semidiametros Terræ, ductis 50 in 19, distantia Solis à Terrâ excedet 950 semidiametros Terræ.

(b) p. 32. l. 1.
(c) *defin.* 6. *cap.* 2.
(d) *Prob.* 1. *cap.* 8.

Certum est igitur, altitudinem Solis excedere altitudinem Lunæ plus quàm decies & novies, ac proinde majorem esse Terræ semidiametris 950, hoc est milliariis Italicis Bononiensibus 3101750, horariis 1033583.

Milliaria deducta sunt ex semidiametro Terræ milliar. Bonon. 3265, hactenus inventarum minimâ, quam satis constat esse verâ minorem. Assumptâ semidiametro veræ

proximâ milliariorum Bononienſium 4139, erit diſtantia Solis à Terrâ major milliariis Bonon. 3932050, horariis 1310683.

PROBLEMA II.

Altitudinem Solis veræ propinquiorem determinare.

Fig. 89. LUnæ Dichotomæ diſtantiam à Sole præ cæteris omnibus inveſtigarunt *Keplerus*, Vendelinus, Ricciolus. Et primus quidem, quamvis ſibi in eâ determinandâ non plenè ſatisfecerit, cenſet tamen, non minorem grad. 89, imò majorem. Secundus aſſerit, ſe primò, comperiſſe, Lunam apparere Dichotomam, cum à Sole diſtat gradibus 89. Deinde verò majori curâ adhibitâ compertum ait à ſe, Dichotomiam accidere, cum Luna abeſt à Sole grad. 89. 30', vel potiùs 45'. Tertius omnium accuratiſſimus obſervator ſummo conatu in hoc negotium incubuit: ex pluribus obſervationibus ſuis tres recenſet, primâ comperit Lunæ biſectæ diſtantiam à Sole *oq* grad. 89. 28' 26": alterâ gr. 89. 29' 45", tertiâ omnium accuratiſſimâ (eam refert in *Almag.* *pag.* 734, priores *pag.* 108) invenit grad. 89. 34' 50". Itaque certum videtur, diſtantiam Lunæ Dichotomæ à Sole non eſſe minorem gradibus 89. Hoc dato

Demonſtrabimus, Solis altitudinem excedere altitudinem Lunæ non minùs quàm quinquagies ſepties; ac proinde Solem à Terrâ non minùs diſtare quàm 2850 Terræ ſemidiametris; hoc eſt non minùs quàm milliariorum Italicorum Bononienſium 9305250. Cum

Cum enim arcus *o q*, adeoque & angulus *o* A S sit non minor gradibus 89; erit *o* S A non major gradu 1., cujus Sinus est 174524. Quare cum in trigono A *o* S, per porisma 1 rectangulo, A *o* sit (*a*) Sinus anguli *o* S A, & A S Sinus totus, erit A *o* partium 174524, quarum A S est 10000000: quibus per 174524 divisis, reperies A S altitudinem Solis continere altitudines Lunæ A *o* 57. 0' 0" 5''' 2'''' 1'''''': hoc est (quia demonstratum est suprà (*b*) altitudinem Lunæ excedere semper 50 Terræ semidiametros) altitudinem Solis A S excedere semidiametros Terræ 2850, quibus ad milliaria reductis, assumendo minimam Terræ semidiametrum milliariorum Bonon. 3265, erit Solis altitudo saltem milliariorum Bononiensium 9305250.

(a) *Def. 6. cap. 2.*

(b) *Prob. 1. cap 8.*

Porrò distantiam tam Solis, quàm Lunæ à Terrâ accuratiùs, & à primis principiis investigamus Astronomiæ nostræ lib. 3. cap. 2, & 3.

Scholium.

Ricciolus ex suâ Lunæ Dichotomæ à Sole distantiâ grad. 89. 28' 26" *elicit distantiam Solis à Terrâ* 7260 *semid. Terræ; ex alterâ verò grad.* 89. 29' 45", *semidiametros Terræ* 7572: *ex tertia, semidiametros* 8333. *Vendelinus autem ex distantiâ Lunæ Dichotomæ à se observatâ vix grad.* 89. 45' *deducit Solis distantiam semidiametrorum Terræ saltem* 13740. *Riccioli scrutinium videtur quàm proximè ad veritatem accedere. Dando igitur*

Digitized by Google

altitudini Solis saltem 7000 semid. Terræ, distantia Solis à Terrâ æquabit saltem milliariorum Bononiensium 22855000, *hoc est plus quàm 7000000 milliariorum horariorum*.

FINIS LIBRI PRIMI.

GEO-

Digitized by Google

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER SECUNDUS

DE SUPERFICIE PLANA.



Lineis rectis transeo ad superficies, sed planas, curvas enim rejeci in librum tertium, quòd minùs commodè à corporibus sejungantur. Non interrumpo seriem capitum primo libro inchoatam, ut evitetur prolixitas citationum.

CAPUT X.

Problemata, quorum usus ad sequentia.

Lemma.

Lineam rectam in superficie terræ designare.

EXtende funem inter duos limites datos. Absque funis adminiculo idem efficies, si per Quadrantis binas dioptras collimans in terminum datum jubeas plures bacillos certis intervallis infigi perpendiculariter terræ, sic ut omnes simul bacillos per dioptras conspicias. Ita enim, quot placuerit, puncta ad rectam lineam quæsitam existentia notabuntur.

Digitized by Google

PROBLEMA I.

Ex datæ in superficie terræ lineæ rectæ GB puncto dato A perpendicularem ducere.

Fig. 1. APplica normæ basim rectæ datæ, sic ut latus normæ respondeat dato puncto: funis secundùm latus normæ extensus dabit perpendicularem quæsitam.

Verùm quia longitudo normæ, qua in mechanicis utimur ad summum est pedum trium, quatuorve, non satis tuta est praxis jam tradita; quia funis à latere tam brevis normæ deviatio, quamvis oculo percipi vix possit, si valdè longa perpendicularis expetitur, in fine erit sensibilis, & magna.

Aliter, & certiùs per Quadrantem.

Fig. 1. Instrumentum constitue horizonti parallelum, sic ut ejus centrum sit directè suprà rectæ datæ G B punctum datum A, quo ita permanente, unum latus instrumenti A E sic verte, ut per ejus dioptras conspicias baculum perpendiculariter humi defixum in datæ rectæ puncto quopiam C: quo facto instrumenti latus A E respondebit rectæ datæ G B. Deinde baculum alterum jube perpendiculariter defigi ex adverso, quanto placuerit intervallo in L, sic ut in eum collimans per dioptras lateris A F intueri possis. Recta per A, & L extensa est perpendicularis quæsita.

Fig. 2. Si recta data GB est basis muri, non poterit in-

Digitized by Google

instituì hæc operatio, nisi priùs ducatur M N ad GB parallela, quod ita fiet: præsidio normæ ducantur GM, BN ad GB perpendiculares, & æquales, recta M N connectens extremitates erit parallela ad G B; cujus distantia à muro ea sufficiet, quæ requiritur, ut possis inter eam, & murum consistere. Jam ad M N ducatur L *K* perpendicularis modo suprà explicato: hæc protracta in A, etiam ad G B perpendicularis erit. Facilè autem erit opus sic ordinare, ut L *K* protracta incidat in datum punctum A, si priùs normâ ex A ducatur A *K* perpendicularis ad G B occurrens M N in *K*, & tum ex *K* reperiatur *K* L perpendicularis ad M N.

Aliter solo fune.

Ad puncti dati A partem utramque sume duo æqualia intervalla AE, AF. In E, & F fige duos funes æquales justæ longitudinis, eosque suprà terram extende, dum se mutuò tangant in D. Recta per D ad A ducta est perpendicularis quæsita, ut patet ex *prop.* 8. *lib.* 1. *Fig.* 2.

PROBLEMA II.

Ad rectam B D in terra datam ex dato extra eam puncto A perpendicularem ducere.

APplica latus normæ puncto A dato, basim verò datæ rectæ: linea secundum normæ latus ducta est perpendicularis quæsita. *Fig.* 3.

Verùm si normâ utimur, oportet distantiam puncti dati non excedere longitudinem normæ. Melius igitur quæsitum obtinebitur.

Digitized by Google

Quadrante.

Fig. 3. Fige palos in dato puncto A, & puncto aliquo E datæ rectæ. Deinde iu datâ rectâ quære punctum C, suprà quod constituto Quadrantis centro possis per dioptras laterum CF, CG intueri palos fixos in E, & A. Recta per C, & A extensa est perpendicularis quæsita.

Solo fune.

Fig. 4. Funem in dato A puncto fixum obliquè ad datam rectam B-D extende, donec eam tangat extremitate suâ in E. Extende similiter ad partem alteram in F. Intervallum EF seca bifariam in C; quod fiet funem ipsi EF æqualem complicando conjunctis extremitatibus. Recta per A, & C ducta est perpendicularis quæsita.

PROBLEMA III.

Angulum in terra datæ quantitatis designare ad datæ rectæ AK punctum datum A.

Fig. 5. QUæratur primò angulus recto minor, ex. gr. graduum 34. Regulam AE Quadrantis statue suprà gradum quæsitum, sic ut arcus BE sit grad. 34. Statue centrum A suprà datum punctum, & in aliquo datæ rectæ puncto D fige palum. Collima deinde per dioptras lateris AB, donec videas palum in D. Rursum alium humi

humi palum fige eo loco, puta in F, ut eum videre possis collimando per dioptras regulæ AE. Recta per A, & F ducta cum datâ AK efficiet angulum 34 grad.

Petatur deinde angulus recto major, ex. gr. 117. Excessum anguli dati suprà 90, nempè 27 grad. numera in Quadrantis limbo ex C in E, & suprà E pone regulam. Tum centrum Quadrantis statue suprà datum punctum A, & latus Quadrantis AB ita colloca, ut oculo posito in B per dioptras lateris conspicias palum defixum in datæ rectæ AK puncto aliquo D. Oculo deinde ad centrum A applicato, baculum figi jube eo loco in F, ut eum videre possis per regulæ AE dioptras collimans. Recta per A, & F ducta constituet cum data AK angulum grad. 117, ut patet. *Fig. 6.*

PROBLEMA IV.

Quemvis visualem angulum metiri.

Visualem angulum efficiunt duo radii FA, KA ex duobus punctis K, & F ad oculum pertingentes, estque idem cum eo, quem *cap. 5 defin. 5* angulum distantiæ appellavi. Quare hoc Problema non differt à Porismate 2 ibidem. *Fig. 5. 6.*

Per dioptras lateris AB, ac regulæ AE collima in puncta data K, & F. Arcus BE manifestabit quantitatem anguli dati in Fig. 5. In casu figuræ 6 arcus EC additus quadranti idem præstabit.

PRO-

PROBLEMA V.

Ad datam in terra rectam BC per datum punctum A parallelam ducere.

Fig. 7. (a) Per prob. 2. (b) Per prob. 1.

Ex dato puncto A duc (*a*) AD perpendicularem ad BC. Ad hanc deinde ex dato in eâ puncto A describe (*b*) perpendicularem AF. Hæc est parallela ad DC patet ex *prop.* 29 *libri* 1.

Aliter.

Fig. 8. (c) Per prob. 4. (d) Per prob. 3.

Stans in quovis rectæ datæ puncto D metire (*c*) angulum visualem BDA. Tum ad rectæ AD punctum A fac (*d*) angulum DAF æqualem angulo BDA. Recta AF est parallela quæsita.

Patet ex *prop.* 28 *lib.* 1, cum anguli alterni BDA, DAF æquales sint.

Aliter.

Cum ad datam rectam BC accessus negatur.

Fig. 9.

In datâ rectâ oculo designa duo signa D, E, in quæ ex dato puncto A collimans metire angulum DAE. Tum aliam quære stationem F, ex qua collimans in eadem puncta D, E, æqualem ipsi DAE reperias angulum DFE.

(b) Per prob. 4. (f) Per prob. 3.

Dein metire (*b*) angulum *o*, eique parem designa (*f*) angulum *n*, seu EAT. Erit recta AT ad BC parallela.

Demon-

Demonstratio. Quoniam anguli D A E, D F E sunt æquales, patet (*a*) per D, A, F, E transire circulum. Ergo quia anguli *o*, *m*, sunt in uno segmento A F E D, æquales (*k*) erunt. Atqui *n* per constr. æquatur *o*. Ergo etiam *n* ipsi *m* æqualis est. Ergo A F, B C, sunt (*n*) parallelæ. *Q. E. D.*

(a) *Ex* 21. *lib.* 3.
(k) *Per* 21. *lib.* 3.
(n) *Per* 28. *lib.* 1.

Hæc praxis, ut accepi, est Clariss. Viri Gerardi Gutschovii Regii Matheseos in Academiâ Lovaniensi Professoris, cujus lucubrationes Mathematicas avidè jam pridem expectamus.

PROBLEMA VI.

Regularium figurarum angulos tam centri, quàm circumferentiæ invenire.

Regularis, seu ordinata figura est, cujus omnia latera, & omnes anguli inter se æquantur. *Fig.* 10.

Angulus centri est B A C quem continent duo radii ab unius lateris extremitatibus ad centrum ducti. Unde figura ordinata tot habet centri angulos, quot latera, quos omnes inter se constat esse æquales.

Anguli circumferentiæ sunt, qui figuræ lateribus continentur; ut B C D, C D E &c.

Inventio anguli ad centrum.

360 Gradus divide per denominatorem figuræ: ut si figura data est Septangula per 7.

Pro-

Digitized by Google

Provenient gradus debiti angulo centri.

Demonstratio est manifesta: nam omnes simul anguli centri conficiunt (*m*) 4 rectos, seu grad. 360. Quare unus ex illis est graduum 360 pars ab ipsorum multitudine, seu denominatore figuræ denominata, Ergo &c.

(m) *Cor.* 3. *prop.* 13 1.

Inventio anguli circumferentiæ.

A duplo numero laterum deme 4. Residuum multiplica per 90. Productum divide per denominatorem figuræ: provenient gradus debiti angulo circumferentiæ.

In Pentagono duplus laterum numerus est 10. Ab hoc si demas 4, remanent 6, quæ ducta in 90 producunt 540: hæc autem divisa per 5 denominatorem figuræ exhibent 108 gradus, qui debentur angulo circumferentiæ Pentagoni.

(b) *Per theor.* 2. *Schol. post* 32. 1.

Demonstratio. Omnes simul anguli (*b*) cujusvis polygoni, seu figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ, demptis quatuor. Quare si duplum laterum numerum demptis 4 ducas in 90 gradus uni recto debitos; provenient gradus debiti omnibus simul figuræ angulis. Quare unus ex illis est pars horum graduum ab angulorum multitudine, seu denominatore figuræ denominata. Ergo &c.

Deno-

Digitized by Google

Denominatores figurarum	Anguli centri	Anguli circumferentiæ.
III	120	60
IV	90	90
V	72	108
VI	60	120
VII	51. 25′ 43″	128. 34′ 17″
VIII	45	135
IX	40	140
X	36	144
XI	32. 43′ 38″	147. 16′ 22″
XII	30	150

PROBLEMA VII.

Figuram quamvis (x) regularem in charta delineare, etiam dato radio, vel latere.

(x) *Vide def.* 3. *l.* 4. *elem.*

FAc (o) angulum O æqualem angulo centri ejus (q) figuræ, quam volebas delineatam. Deinde centro A anguli vertice, intervallo lubito describe circulum lateribus anguli occurrentem in H, & B. Recta H B est latus figuræ quæsitæ.

Fig. 10. (o) *Per prax.* 3. *Schol. post.* 23. *l.* 1. (q) *Probl.* 6.

Exemplum. Oporteat septangulum ordinatum describere. Ejus centri angulus est grad. 51. 26′ ferè. Tantùm fac (a) angulum O. Centro A descriptus circulus secet anguli latera in

(a) *Per prax.* 3. *Schol. post.* 23. *l.* 1.

in H, & B. Recta H B septies per circumferentiam traducta dabit septangulum ordinatum ad radium collibitum.

Si figuram desideras, cujus latus sit longitudinis datæ, sic operare. Angulum O centri figuræ quæsitæ (b) describe, ut suprà. Centro A describatur circulus Secans anguli latera in H, & B, & duc H B. Inter latera anguli O aptetur latus datum I K, ut sit parallelum ad HB. Centro A describe circulum per puncta I, & K (ambo enim ad circulum sunt) K I per circumferentiam hujus circuli sæpiùs repetita, dabit quæsitum.

(b) Per vand.

Fig. 11. Aptabitur porrò data recta inter latera dati anguli, sic ut sit alteri H B parallela, hoc modo. Per anguli verticem A duc infinitam A P parallelam ad H B, & fit A M par datæ A b M; duc M K parallelam ad A B, secantem A H in K. Per K ducatur K I parallela ad H B: hæc etiam (c) æqualis erit datæ A M.

(c) Per 34. lib. 1.

Aliter.

Fig. 10. Describe (d) angulum LEN circumferentiæ (o) ejus figuræ, quamvis delineatam. A lateribus anguli abscinde E F, E D æquales lateri dato. Tum per tria (b) puncta FED describe circulum. Hic capiet figuram quæsitam, si F E, vel E D per circumferentiam sæpiùs traducatur.

(d) Per prax. 3. Schol. post. 32. l. 1.

(o) Probl. 6.

(b) Per 5. l. 4.

Scholium.

Cæterùm, nondum via reperta est, qua certò, & infallibiliter, nihil videlicet tentando, figu-

ræ-

ræ omnes ordinatæ describantur. Pendet enim ea descriptio à divisione circumferentiæ in partes æquales 3.4.5.6.7, & sic deinceps secundùm omnes sequentes numeros; quæ quidem divisio adhuc desideratur. Libro 4 elem. solo circino, & regulâ dividitur circumferentia in partes æquales 3.4.5.6: ac proinde inscribuntur circulo, Triangulum, Quadratum, Pentagonum, Hexagonum. Et quoniam arcus quivis Geometricè secari potest bifariam circino, & regulâ; conicè verò trifariam parabolâ aut hyperbolâ: manifestum est, figuras eas omnes viâ, & ratione describi posse, quarum denominatores sunt termini progressionum duplarum, & triplarum incipientium ab his quatuor numeris 3.4.5.6. Quibus si eas adjungamus, quarum denominatores producantur ex duarum quarumlibet figurarum jam inventarum denominatoribus inter se multiplicatis, repertæ erunt figuræ ordinatæ omnes, quas aliquâ certâ viâ, sed methodo infallibili possimus describere. Cæteræ præter has omnes hactenus non nisi mechanicè, hoc est tentando, construuntur. Non aliter circuli circumferentia in gradus 360 dividitur. Unde, quæ ejus adminiculo construuntur Problemata, non Geometricè sed mechanicè soluta dicuntur. Sectiones porrò conicæ non videntur à constructione Geometricâ excludendæ: has enim si adhibueris, perinde viâ, ac ratione procedis, atque si rectam lineam, aut circulum; neque alia differentia est, quàm quòd minùs expedita sit conicarum linearum descriptio.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VIII.

(x) *Vide def. 3. l. 4. elem.* Figuram quamvis (x) ordinatam in terrâ describere, etiam dato radio, vel latere.

Fig. 10. (n) *Prob 6.* PEr Probl. 3 describe in terrâ angulum O, centri (n) figuræ quæsitæ: ex lateribus anguli abscinde radios collubitæ magnitudinis A H, A B, ducaturque recta H B: hæc erit latus unum figuræ quæsitæ. Fiat deinde angulus alter B A C par priori O; & recta A C par ipsi A B, jungaturque B C: erit hæc latus secundum. Eâ methodo cætera latera reperientur. Ubi latus penultimum F G fuerit designatum, quod tum superrerit intervallum G H, necessariò æquale erit lateribus cæteris, aut malè fuit, & oscitanter instituta delineatio.

Quòd si figuram desideras habentem latus longitudinis datæ ex. gr. heptagonum, cujus latus sit pedum 1000, ex latere dato quære radium, quo reperto, describe ad eum radium, modo jam explicato, figuram quæsitam, puta heptagonum; habebitque illa latera etiam data, puta 1000 pedum. Reperietur porrò radius ex latere in triangulo H A B: in quo
(o) *Per prob. 6* quia notus (o) est angulus O, etiam summa
(n) *Per coroll. 8. p. 32 l. 1.* (n) reliquorum nota est; ac proinde, &
(m) *Per 5 l 1.* singuli, cum inter se sint (m) æquales. Cum
(q) *Per 9. c. 3.* igitur in Trigono H A B anguli dentur, & latus unum, etiam latus (q) A B, nempè radius innotescet.

Ali-

Aliter.

Cum ſtatio non conceditur in centro figuræ A.

Deſcribe (*a*) in terra angulum L E N (*b*) circumferentiæ ejus figuræ, quam cupis delineare, & à lateribus abſcinde partes utrimque æquales E F, E D magnitudinis collibitæ. Ad punctum D conſtitue ſecundum circumferentiæ angulum E D C, & fac D C parem E D, E F; atque ita in orbem operare. Ubi deſignatum fuerit latus penultimum H G, quod tum ſupererit intervallum G F, ſi exactè fueris operatus, æquale erit lateribus, angulique circumferentiæ G, & F prioribus circumferentiæ angulis æquales erunt, quod infrà demonſtrabitur *Probl.* 10. *Fig.* 10. (a) *Probl.* 3. (b) *Probl.* 6.

PROBLEMA IX.

Rectilineo irregulari cuicumque Z in chartâ dato ſimile in terrâ deſcribere.

FAc in terrâ (*a*) angulum æqualem angulo C, & ab ejus lateribus abſcinde tot pedes, vel paſſus, vel perticas, (prout magnam figuram deſideras) quot partes ſcalæ continent C B, C D. Ita in orbem operando quæſitum obtinebitur. *Fig.* 11. (a) *Per prob.* 3.

PROBLEMA X.

Dati loci Z ichnographiam describere.

Fig. 12. 13

HOc est figuræ in terræ superficie datæ, similem in chartâ delineare.

(a) Per prob. 4.

Metire (*a*) loci dati angulos A, B, &c. item latera præsidio perticæ; & eorum magnitudines inventas nota inter suos quosque angulos: nimirùm primo loco scribe gradus anguli A, secundo pedes lateris A B, tertio gradus anguli B; atque ita deinceps.

(b) Per prax. 3. Schol post 32. l. 1.

Deinde fac (*b*) in chartâ angulum F parem angulo A, ejusque latera F G, F *K* tot partium scalæ, quot pedum erant latera A B, A E. Rursum angulus G fiat æqualis angulo B, ejusque latus G H tot partium scalæ, quot pedum erat B C. Pari modo angulus H par fiat angulo C, & latus H I tot partium scalæ, quot pedum erat C D. Jungantur postremò puncta I, & *K*, eritque (ut mox ostendam) I *K* tot partium scalæ, quot pedum erit D E, anguli que I, & *K* pares erunt angulis D, & E; adeoque figura X similis erit loco dato Z.

(c) Constr.
(d) Constr.
(e) Per 6. l. 6.

Demonstratio. Ductis mente ex I, & D ad oppositos angulos rectis lineis, figuram utramque in triangulis D C B, I H G, quia latera D C, C B, & I H, H G circa (*c*) æquales angulos C, H proportionalia (*d*) sunt, erunt (*e*) anguli *o*, *n*: item *q*, *r*, æquales: & B C erit ad B D, ut G H ad G I. Quia vero jam ostendi, pares esse angulos

q, *r*,

Digitized by Google

q, *r*, & per constr. toti B, ac G æquales sunt: etiam reliqui S, *t* æquales (*o*) erunt. Deinde quia (*f*) A B est ad B C, ut F G ad G H, & (quod jam ostendi) B C ad B D, ut G H ad G I; etiam ex (*p*) æquo A B erit ad BD, ut F G ad G I. In triangulis igitur ABD, FGI latera A B, BD; & F G, G I circa æquales angulos S, *t* proportionalia sunt. Ergo etiam (*s*) A B est ad A D, ut F G ad F I, & anguli *m*, *p*, itemque *l*, *u* æquales; ac proinde, quia æquantur (*k*) toti A, F; etiam *y*, *δ* (*m*) æquales erunt. Jam quia ostendi A D esse ad A B, ut F I ad F G; A B verò est ad A E, ut F G ad F*K*; ex æquo erit A D ad A E, ut F I ad F *K*. In triangulis igitur AED, F *K* I latera A D, A E; & F I, F *K* circa æquales angulos *y*, & *δ* proportionalia sunt. Ergo (*q*) A E est ad E D, ut F K ad K I (quod erat unum ex demonstrandis), & (*r*) anguli E, K æquales sunt (quod erat alterum) itemque anguli *α*, *θ* æquantur: quibus si addamus ostensos suprà æquales *m o*, & *p n*, toti D, & I æquales erunt, quod erat tertium.

(o) Per 32. *l*. 1.
(f) *Constr.*
(p) Per 22. *lib*. 5.
(s) Per 6. *l*. 6.
(k) *Constr.*
(m) Per 32. *lib*. 1.
(q) Per 6. *l*. 6.
(p) *eand.*

Scholium.

Ex demonstratione patet, tantùm esse necessarium, ut mensurentur omnes anguli loci dati præter duos, exempli gratiâ præter D, & E; & omnia latera præter unum E D, quod angulis non mensis interjacet.

CAPUT XI.

Figurarum rectis lineis comprehensarum dimensio.

REvocanda huc sunt, quæ *cap.* 1 de mensuris scripsi. Metimur superficies quadrato alicujus notæ mensuræ, ut quadrato pede, vel passu quadrato, vel quadratâ perticâ: hoc est quadrato, cujus latus est pes, vel passus, vel pertica.

Definitio.

Area, seu quantitas alicujus superficiei mensurari, produci, reperiri dicitur, cum innotescit quot quadratis alicujus notæ mensuræ (quadratis exempli gratia pedibus, vel perticis) æqualis est.

Et cum dicitur area alicujus figuræ produci ex multiplicatione duarum linearum, ex. gr. altitudinis in basim: sensus est, aream tot continere pedes quadratos datos ex. gr., quantus est numerus, qui fit ex numero pedum altitudinis ducto in numerum pedum baseos.

PROBLEMA I.

Aream quadrangularem rectam metiri.

Fig. 14. SI est oblonga, producitur ex multiplicatione duorum contiguorum laterum AB, AC; si quadrata, (*ut in Fig.* 15) ex multiplicatione unius lateris per seipsum.

Exem-

Digitized by Google

Exemplum areæ oblongæ. Metire contigua latera AB, AC; & sit AB pedum 3, AC 6. Multiplica AB 3 per AC 6, proveniunt 18 pedes quadrati, quibus area AL æqualis est. Si AB fuisset 3 passuum, & AC passuum 6: tunc 3 per 6 multiplicatis, provenissent 18 quadrati passus pro areâ oblongâ AL: atque ita per alias quasvis mensuras procedendo: id quod erit deinceps in sequentibus observandum.

Exemplum areæ quadratæ. Metire latus unum AB, quod sit pedum 3. Multiplica 3 per se, proveniunt 9 pedes quadrati, quibus area quadrata AD æqualis est.

Demonstratio. Latera contigua AB, AC divisa intelligantur in suas æquales mensuras ex. gr. in pedes, & per divisionum puncta ducantur lateribus AB, AC parallelæ, sic ut tota area AL sit cancellata, hoc est in minores areas divisa. Demonstrandum est, singulas minores areas esse quadrata pedalia, sive pedes quadratos, & quidem tot, quantus est numerus, qui fit ex pedibus lateris AB ductis in pedes lateris AC. *Fig.* 14.

Accipiatur areola quævis EPNG. Quia PD est (*a*) parallela AB, erit externus angulus PDM (*b*) æqualis angulo BAD interno: sed BAD rectus (*c*) est. Ergo etiam PDM rectus est. Rursum quia (*d*) EG æquidistat AC; angulus externus PEG interno PDM (*e*) æqualis est. Cum ergo PDM ostensus sit rectus; etiam PEG rectus est. Deinde, quia PN, AC sunt (*f*) parallelæ, & angulus PDM ostensus est rectus; etiam DPN (*g*) rectus erit. Pari modo ostendam, angulos G, & N esse rectos.

(a) *Per const.*
(b) *Per 27. lib. 1.*
(c) *Per hyp.*
(d) *Per const.*
(e) *Per 27. l. 1.*
(f) *Per const.*
(g) *Per 27. 1.*

 Areo-

Areola igitur EP
quia P N, & E G
erunt inter se ( )
sunt parallelæ a
se . Ergo E P N
eodem modo o
reliquas omnes
E G æqualis es
D M , Q F su
unus pes . Er
Quare cum
patet, omnia
di verò etia
Areola igit
dem unius
ri ipsi D M
dem ratio
las esse qu
tos .

Reliq
subdivis
numeru
inter se
A L to
F S , (
qui ist
quot
ra A
tot p
mer
teri
(
dra

dr

(h) *Per const.*
(i) *Per 30. lib. 1.*
(r) *Per defin. 35. lib. 1.*
(l) *Per 34 l. 1.*
(m) *Hyp.*
(n) *Per 34. lib. 1.*

Digitized by Google

num pendent reliquarum omnium figurarum. Unde ea fuit in gratiam discentium accuratè deducenda. Hæc etiam causa fuit, cur à quadrangulo potius, quam à triangulo initium duxerimus metiendi.

Corollaria.

1. Quot milites stare possunt in campo quadrato unius Belgici milliaris, dato singulis passu quadrato?

Milliare Belgicum, sive horarium continet 18000 pedum Rhynlandicorum, quæ ducta in se efficiunt 324000000 pedum quadratorum pro areâ quadrati milliaris Belgici, quæ si dividantur per 25 (tot enim pedes quadratos continet quadratus passus: nam unus passus facit 5 pedes, qui ducti in se faciunt 25 pedes quadratos pro uno passu quadrato) proveniunt 12960000 passuum quadratorum, hoc est 12 milliones & 960 millia pro numero quæsito. Tot igitur stare poterunt in quadrato milliari Belgico singulis quadratum passum occupantibus.

2. Est area recta quadrangula longa pedes 160, lata 70: quot ea homines capiet, 4 pedibus quadratis in singulos assignatis?

Duc areæ latera 160, & 70 in se mutuò, proveniunt pedes quadrati 11200 pro areâ propositâ: quibus divisis per 4, proveniunt 2800 pro numero hominum quæsito.

3. Pavimentum offertur porticus alicujus, & lapis quadratus datur. Quot quadratis lapidibus dato æqualibus opus est, ut pavimentum sternatur?

Digitized by Google

Experire, quot lapides juxta se positi expleant longitudinem porticus, quot latitudinem. Hi lapidum numeri per invicem multiplicati dabunt numerum eorum, qui requiruntur, ut pavimentum totum sternatur.

Fig. 14. 4. Pavimentum alicujus porticus stratum est lapidibus quadratis. Petitur numerus lapidum.

Inquire, quot lapides sint in duobus lateribus contiguis A B, A C. In A C sint 500, in A B 50: hi numeri per invicem multiplicati producunt 25000 numerum quæsitum lapidum dato pavimento contentorum.

Scholium.

Quoniam 3, & 4 Corollario attigi quædam de quadratis lapidibus pavimenti, juvat aliquid his affine, nec scitu injucundum attexere.

Dantur quadratæ areæ binæ, quarum altera alterius dupla est. Petuntur æquales quadrati lapides, quibus utraque sternatur præcisè. Frustra hic se torqueat Architectus Matheseos imperitus: quod enim quærit, nunquam inveniet, cum quæsitum impossibile sit, quoscumque æquales lapides assumpserit, sive magnos, sive quantumvis parvos. Neque solùm id erit verum, si areæ sint altera alterius dupla; verùm etiam si tripla, aut quintupla, vel universim eam inter se proportionem habeant, quam aliquis numerus primus ad numerum primum.

Demonstratio pendet ex theoremate 2 Arithmeticæ nostræ lib. 5. cap. 7. *Nam si duæ qua-*

quadratæ areæ habentes eam inter se proportionem, quam 2 ad 1, aut quam aliquis numerus primus habet ad alium primum, lapidibus quadratis æqualibus stratæ essent præcisè totæ: manifestum est, ipsos lapidum numeros areas tegentium etiam fore quadratos numeros: ac proinde quadrati dabuntur numeri, qui sint inter se, ut 2 ad 1, sive ut primus numerus ad primum numerum. Atqui inter duos quadratos quoscumque dari (q) potest medius proportionalis. Ergo etiam inter 2, & 1, aut inter duos alios primos numeros dari poterit medius proportionalis, quod fieri non posse theoremate suprà citato demonstravi.

(q) *Per 11. lib. 8.*

PROBLEMA II.

Aream cujusvis parallelogrammi invenire.

Fig. 16.

OMnis parallelogrammi area producitur ex altitudine in basim ductâ.

Detur parallelogrammum ABCD, cujus magnitudinem oporteat invenire. Inter duo ejus latera, ubi id commodiùs fuerit, designetur (*a*) perpendicularis GN; & tam illa, quàm latus AD, in quod perpendicularis cadit, mensurentur. Numeri mensurarum in GN, & AD reperti per invicem multiplicati dabunt numerum mensurarum quadratarum, quibus æquale est parallelogrammum ABCD.

(a) *Per probl. 1. & 10.*

Exemplum. Altitudo GN reperta sit pedum 10, AD basis pedum 40. Duc 10 in 40: proveniunt 400 pedes quadrati, quibus area parallelogrammi AC æqualis est.

De-

Digitized by Google

Demonstratio. Ducantur ex A,& D perpendiculares A E, D F. Quadrangulum rectum A E F D producitur ex multiplicatione ipsius E A; hoc est G N, in A D. Atqui A E F D (b) æquale est ipsi A B C D. Ergo etiam ABCD producitur ex multiplicatione ipsius GN in AD. *Q. E. D.*

(b) *Per* 35. *lib.* 1.

Qui hæret in terminis, consulat definitionem positam ante *Probl.* 1. Quod etiam erit in aliis hujus generis demonstrationibus factitandum.

Quando area parallelogrammi ob lacus, arbores, vel alia obstacula inpervia est; ac proinde in eâ perpendicularis designari,& mensurari nequit, confugiendum erit ad *Problema* 8. *hujus capitis.*

Scholium.

Occurrendum hìc est dubitationi Tyronum satis ordinariæ. Parallelogrammum obliquum A B C D (& idem est de aliis figuris,) nequit resolvi in quadrata, sic ut ea sibi mutuò opposita obliquum parallelogrammum præcisè expleant, eique commensurentur, & congruant, ut vidimus in quadrangulo recto Problemate præcedenti. Quì ergo istud parallelogrammum potest mensurari per quadrata, ex.gr. pedalia, & certo talium quadratorum numero esse æquale? Est quidem illa hallucinatio valdè crassa; sed tamen, ut dixi, Tyronibus familiaris. Sciant igitur illi tam superficies quàm corpora æquari inter se posse, licèt sint dissimilia, ac proinde unum alteri nequeat congruere, ut ex totâ passim Geometrià patet. Sic propos.

42

42. lib. 1. *exhibetur triangulo æquale parallelogrammum*, *&* prop. 45. *parallelogrammum æquale cuivis alteri figuræ rectilineæ*. *Congruentia igitur ad æqualitatem non requiritur præterquam in rectis lineis, & angulis rectilineis, in quibus hæc ab illâ inseparabilis est*.

PROBLEMA III.

Aream quadranguli habentis duo inæqualia latera parallela invenire. *Fig. 17.*

TAlis quadranguli area producitur ex dimidiâ summâ parallelorum laterum in altitudinem. (a) *Per prob. 10 cap. 10.*

Esto quadrangulum ABCD habens parallela latera inæqualia AD, BC. Inter hæc designa (*a*) perpendicularem KL, & tam hanc, quàm ipsa latera parallela metire, multiplica deinde perpendicularem KL, per dimidiam summam parallelorum laterum BC, AD. Provenient mensuræ quadratæ, quibus quadrangulum ABCD est æquale.

Exemplum. Perpendicularis, seu altitudo KL reperta sit pedum 20, summa laterum parallelorum BC, AD 60, cujus dimidium est 30. Duc 20 in 30; provenient 600 pedes quadrati, quibus area ABCD æqualis est.

Demonstratio. Seca bifariam latera AB, DC in punctis O, & P, per quæ duc ad AD perpendiculares, quæ ipsi BC productæ occurrant in E, & G. In triangulis OEB, OFA anguli (*b*) alterni E, & F; itemque anguli ad (*c*) verticem O æquales sunt; & latera BO, AO (*d*) æquan- (b) *Per 27. l. 1.* (c) *Per 15. l. 1.* (d) *Per const.*

Digitized by Google

(n) *Per 26. l. 1.* æquantur. Ergo (*n*) etiam tota triangula, & latera EB, AF æqualia sunt. Eodem modo ostendam, æqualia esse triangula PGC, PND, & latera CG, ND. Ergo

EG Æ { BC, AF, ND

Quare si utrimque addatur FN, erunt

EG, FN Æ { BC, AF, ND, FN

(e) *Per 34. lib. 1.* hoc est EG, FN æquatur ipsis BC, AD. Ergo cum EG, FN æquales (*e*) sint; erit una ex duabus, nempè FN dimidia summæ ipsarum BC, CD. Deinde quia triangula OEB, PGC ostensa sunt æqualia triangulis OFA, PND; si utrimque addatur planum FOBCPN, erit FEGN æquale ipsi ABCD. Atqui FEGN; quia rectangulum est, producitur (*f*) ex EF; hoc est KL, ductâ in FN. Ergo etiam ABCD producitur ex KL ductâ in FN, quam ostendi esse dimidiam summam laterum parallelorum. Liquet ergo quæsitum.

(f) *Per prob. 1.*

(o) *Prob. 8*

Si area ABCD inpervia est, mensurabitur infrà Problemate (o) universali, ad quod etiam referenda erit reliquorum irregularium quadrangulorum dimensio.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA IV.

Metiri aream triangularem, quæ pervia sit.

Cujusvis trianguli area producitur ex semisse altitudinis ductâ in basim, sive ex altitudine totâ ductâ in semissem basis. *Fig.* 18. 19

Detur triangulum A B C, cujus oporteat capacitatem invenire. Ex quovis angulo, puta ex B, designetur (*a*) perpendicularis BD in latus oppositum, quod Basim voco, sive ea cadat intra triangulum (ut in *Fig.* 18), sive extra in latus productum (ut in *Fig.* 19). Commodiùs erit, si cadat intra. Mensuretur deinde tam perpendicularis BD, quàm basis AC; & per invicem multiplicentur. Semissis producti exhibet quadratas mensuras, quibus area trianguli æqualis est.

(a) *Per prob.* 2. *c.* 10.

Vel dimidia altitudo BD ducatur in basim AC; aut tota altitudo BD in basis AC semissem. Provenient utrobique mensuræ qnadratæ triunguli dati.

Exemplum. BD reperta sit pedum 14, AC, 20. Duc 14 in 20. Fiunt pedes 280, cujus producti semissis 140 exhibet pedes quadratos, quibus triangulum datum æquale est. Vel ex altitudine pedum 14 sume dimidium 7, & duc in basim 20. Proveniunt item 140 pedes quadrati pro areâ trianguli. Vel ex basi pedum 20 accipe semissem 10, & duc in altitudinem totam 14. Provenient rursum 140 quadrati pedes pro areâ quæsitâ.

Demonstratio. Fiat parallelogrammum

AN

Digitized by Google

ANOC ejusdem cum triangulo ABC altitudinis BD, & super eâdem basi AC. Per *prop.* 41. *lib.* 1. triangulum ABC dimidium est parallelogrammi ANOC. Atqui area parallelogrammi producitur ex altitudine BD ductâ in basim AC. Ergo area trianguli est istius producti dimidia, sive producitur ex dimidiâ altitudine BD ductâ in basim AC: *Q. E. D.*

Corollarium 1.

Fig. 21. Area trianguli rectanguli habetur; si duo latera AB, AC angulum rectum continentia ducantur in invicem, & producti sumatur dimidium. Ratio est, quia latus utrumlibet recto adjacens est altitudo trianguli, reliquum basis.

Corollarium 2.

Fig. 20. Ex angulis singulis trianguli in latera opposita ducantur perpendiculares AE, BD, CF, quæ in sua quæque latera ducantur. Semissis cujuslibet horum trium productorum exhibet aream trianguli. Patet ex demonstratione jam allatâ.

PROBLEMA V.

Aream trianguli imperviam invenire.

Ex præcedenti patet, ad dimensionem trianguli opus esse, ut notum sit latus unum unà cum perpendiculari in illud cadente ex opposito angulo. At quando trianguli area est impervia, non potest in eo perpendicularis designari,

ri, & perticâ mensurari. Tunc igitur ea erit Geometricè indaganda, mensuratis primùm omnibus trianguli lateribus; quod fieri potest licèt area ipsa impervia sit. Geometrica porrò perpendicularis inventio traditur *prob. 6. cap.* 3, & adhuc aliter in Scholio *prop.* 13. *lib.* 2.

PROBLEMA VI.

Aream triangularem imperviam sine perpendicularis adminiculo ex solis notis lateribus indagare.

A Dimidiâ laterum summâ aufer singula latera. Tria residua quovis ordine inter se multiplica. Productum multiplica per dimidiam laterum summam. Producti ultimi radix quadrata dabit aream trianguli.

Exemplum. Detur triangulum BAC, cujus latus BA sit pedum 45, AC 25, CB 40. Ergo summa laterum est 110, & summæ dimidium 55. *Fig. 23.*

Ab hac dimidiâ laterum summâ 55 aufer singula latera: eruntque residua tria 10, 30, 15.

Hæc residua quovis ordine inter se multiplica (semper enim eumdem produci numerum demonstravi (a) in *Scholio prop.* 19. *lib.* 8, qui mihi secundus est): proveniunt 4500.

(a) *vide Arithm. nostram.*

4500 multiplica per 55 dimidiam laterum summam. Proveniunt 247500.

Hujus producti ultimi 247500 radix quadrata 497 pedes quadratos triangularis areæ exhibebit.

Demonstratio hujus Praxeos pulchra, & subtilis est, sed prolixior, quàm ut à studiosis non-

nondum satis exercitatis facilè intelligatur. Minuetur difficultas, si in plura eam quasi Theoremata, sive partes divisam proponamus.

Demonstratio.

I.

Fig. 22. Trianguli ABC angulos B, & C bisecent rectæ BD, CD concurrentes in D: & ex D ducantur ad singula latera normales DE, DF, DG.

Dico, AE, EB, GC tres esse differentias inter latera trianguli singula, & semissem summæ laterum.

Demonstratio. Junge AD. Ex hyp. anguli ad B sunt pares; & BED, BGD recti: latus autem BD commune. Ergo (*a*) ED, DG sunt æquales. Pari modo æquantur FD, DG. Ergo, & ED, FD, adeoque, & quadrata ED, FD æquantur. Similiter per *prop.* 26 *lib.* 1. EB ipsi GB; & FC ipsi GC æqualis est. Quoniam verò quadratum AD per *prop.* 47 *lib.* 1 æquatur tam quadratis AE, ED, quàm AF, DF, erunt quadrata AE, ED æqualia quadratis AF, FD: demptisque æqualibus ED, FD, reliqua AE, AF, adeoque & rectæ AF, AE æquantur. Quoniam igitur AE ipsi AF, & EB ipsi BG, & FC ipsi GC ostensæ sunt æquales; erunt AE, EB, GC; hoc est AB, & GC æquales ipsis AF, BG, FC; hoc est ipsis AC, BG. Ergo tam AB cum GC, quàm AC cum BG semissis est summæ laterum. Eodem modo ostendam, BC

(a) *Per* 26. *lib.* 1.

cum

cum A F semissem esse laterum trianguli. Lateris ergo A B, & semisseos A B, G C differentia est G C: item lateris A C, ac semisseos A C, B G differentia est B G, sive B E: lateris demum B C, ac semisseos B C, A F differentia est A F, sive A E. Differentiæ igitur inter semissem laterum trianguli, & singula latera sunt A E, E B, G C: *Q. E. D.*

[illegible]

[illegible] II. [illegible]

[illegible]

Iisdem positis: ex A B producta sume B H æqualem C G, quæ est una differentiarum, & ex H ducta normalis H *K* occurrat A D productæ in *K*. *Fig.* 22.

Dico D E esse ad E B, ut B H, seu G C ad H *K*.

Demonstratio. Fiat B L par ipsi G C, seu B H; jungaturque *K* L, & ex A H, A C productis sume H M, C I pares B G: junge demum B *K*. Ostendi in demonstratione præcedenti, tam A B cum G C, hoc est cum B H, quam A C cum B G, hoc est cum C I, semissem esse laterum trianguli. Ergo A H, A I æquantur, & latus A *K* commune est: anguli quoque ad (*b*) A sunt pares, cum ostensum sit in præced., A E, E D, D A æquari A F, F D, D A. Ergo H *K* par (*c*) est *K* I, & angulus A H *K* per angulo A I *K*. In triangulis igitur M H *K*, C I *K*; cum etiam MH, C I ex constr. sint pares; (*d*) æquantur MK, *K* C. Quare cum in triangulis M B *K*, C B *K* ex constr. B M (*e*) ipsi B C, & M *K* ipsi *K* C, & B *K* sibi ipsi æqualia sint; anguli

(b) *Per* 8. *l.* 1.

(c) *Per* 4 1.

(d) *Per eamdem.*

(e) *Per constr.*

(f) Per 8. l. 1. MBK, (f) CBK æquantur. Quia igitur in triangulis HBK, LBK etiam latera HB, BK æquantur lateribus LB, BK; anguli (g) HKB, LKB: item KHB, KLB æquantur. Ergo cum KHB sit rectus ex constr., erit & KLB rectus. Sed quadrilateri HBLK 4 anguli faciunt 4 (h) rectos. Ergo quia H, & L sunt duo recti, facient HBL, HKL duos rectos, adeoque æquales anguli HBL, ABL. Dempto igitur communi HBL, reliqui HKL, ABL, ac proinde, & EBD, HKB eorum, ex hypothesi, & Demonstratione, dimidii, æquantur. Atqui etiam BED, BHK ex hypothesi sunt recti, adeoque pares. Triangula ergo DEB, BHK æquiangula sunt. Ergo (n), ut DE est ad EB, sic BH ad HK. *Q. E. D.*

(g) Per 4. l. 1.

(h) Per theor. 1. schol. post 32. l. 1.

(n) Per 4. l. 6.

III.

Fig. 22.

Iisdem positis; concipiantur differentiæ AE, EB, GC, sive BH, nec non, & DE sectæ esse in partes æquales ejusdem mensuræ ex. gr. in pedes; ac proinde concipiantur jam non ut lineæ, sed ut numeri. Dico, productum differentiarum AE, EB, BH inter se multiplicatarum æquari quadrato ipsius DE ducto in AH.

Demonstratio. Quoniam (m) DE est ad EB, ut BH ad HK; erit productum numerorum ED, HK æquale producto differentiarum EB, BH. Ergo quadratus ipsius ED ad productum utrumque eodem modo se habet. Sed quadratus DE ad productum ex ED in HK (r) est, ut ED ad HK. Ergo quadratus

(m) *Ostendi n. præc.*

(r) Per 1. lib. 6.

tus D E ad productum ex E B in B H etiam est, ut D E ad H K, hoc est (quoniam æquidistant E D, H K) ut A E ad (o) AH. Quoniam igitur est (o) *Per 4. lbi. 6.*

Ut quadratus ipsius D E	Ad productum differentiarum EB, BH,
Ita numerus A E	Ad numerum A H

erit quadratus ipsius D E ductus in A H par producto differentiarum E B, B H ducto in differentiam A E; hoc est, tribus differentiis A E, E B, B H inter se multiplicatis. Tres enim numeri (p) quomodocumque inter se multiplicati, idem producunt. Patet ergo propositum. (p) *Demonstravi ad p. 19. l. 8*

I V.

Iisdem positis: productum diferentiarum A E, E B, B H inter se multiplicatarum ductum in A H semissem laterum trianguli æquatur producto quadrati D E, multiplicati in quadratum ejusdem semisseos laterum A H. *Fig. 22.*

Demonstratio. Per num. 3. productum differentiarum se mutuò multiplicantium æquatur producto ex quadrato D E, & semisse A H. Ergo productum differentiarum se mutuò multiplicantium ductum in A H æquetur producto ex quadrato D E, & A H ducto in A H. Sed productum ex quadrato D E, & A H ductum in A H, æquatur quadrato D E ducto in quadratum A H, ut patet ex Scholio p. 19. 8. Ergo productum differentiarum in se mu-

Digitized by Google

mutuò ductarum æquatur quadrato ipsius DE ducto in quadratum A H. *Q. E. D.*

V.

Fig. 24. Duo numeri A, B se mutuò multiplicantes faciant numerum D: & eorum quadrati sint C, & F. Dico, si C, & F se mutuò multiplicantes producant N, hunc esse quadratum numeri D.

Demonstratio. Cum A multiplicans seipsum, & B gignat C, & D; erit (per *prop*. 17 *lib*.7) ut A ad B, sic C ad D. Item cum B multiplicans se, & A producat D, & F; erit, ut A ad B, (hoc est C ad D) sic D ad F. Sunt ergo C, D, F in continuâ proportione. Ergo N productum quadratorum C, F æquatur quadrato ipsius D.

V I.

Fig. 22. Iisdem positis, quæ *num.* 2. 3. 4, dico. Radix quadrata numeri, qui fit ex producto differentiarum se invicem multiplicantium ducto in semissem laterum trianguli, exhibet aream trianguli in quadratis partium, secundùm quas lateras sunt nota.

(a) *Per prob.* 4. *Demonstratio*. Triangulum (*a*) ADB producitur ex normali DE ductâ in semissem ipsius AB. Pari modo quoniam normales DE, (b) *num*. 1 DG, D F ostensæ (*b*) sunt pares, triangula BCD, CDA producuntur ex normali DE ductâ in semisses ipsarum B C, C A. Tota ergo area trianguli A B C producitur ex D E in semissem laterum omnium, id est in A H ductâ.

ductâ. Ergo per *num.* 5 quadrati ipsorum DE, & AH inter se multiplicati producunt numerum quadratum areæ triangularis ABC. Atqui per *num.* 4 productum differentiarum AE, EB, BH, seu GC inter se multiplicatarum ductum in AH semissem laterum æquatur producto quadratorum DE, AH. Ergo productum differentiarum ductum in semissem laterum trianguli gignit quadratum numerum areæ triangularis ABC. Ergo radix ejus quadrata dabit aream trianguli in quadratis, nempè partium lateralium. *Q. E. D.*

PROBLEMA VII.

Aream superficiei irregularis multangulæ cujuscumque, quæ pervia sit, invenire.

Resolvenda est area in triangula, vel quadrangula hactenùs mensurata.

Modus I.

Intra aream mensurandam designetur linea, quæ potest longissima BQ, ad quam ex omnibus angulis designentur (*a*) perpendiculares, quæ locum datum secabunt in quadrangula, quorum duo sint parallela latera, & in triangula rectangula. Metire singula per problemata 3, & 4. Summa ex omnibus collecta dabit aream quæsitam. *Fig.* 25. (a) *Per prob.* 2 *cap.* 10.

Digitized by Google

Modus II.

Fig. 26. Areæ mensurandæ rectangulum inscribe, quam potes maximum ABCD, aut certè quadrangulum maximum bina habens latera parallela. Spatia residua resolve in triangula, & , si opus est, in quadrangula. Metire singula per *prob.* 1. 3. 4. Summa ex omnibus collecta aream quæsitam exhibebit.

Modus III.

Fig. 27. Locum datum resolve in sola triangula, quæ metire singula per *prob.* 4. Omnium summa dat aream incognitam.

Modus I. est cæteris commodior, quia non cogimur campum sæpius obire. Ab hoc placet secundus. Tertius crebrá discursatione molestior.

Scholium.

Si areæ pars aliqua sit curvilinea, inscribe illi triangula, & quadrangula, donec residuum curvilineum æstimari non debeat.

PROBLEMA VIII.

Aream imperviam superficiei multangulæ irregularis invenire.

VArii modi sunt: breviter recensebo duos præcipuos.

Mo-

Modus I.

Metire omnes loci dati (*a*) angulos (sive interni sint, sive externi, ut A), & omnia latera, quæ inter suos quæque angulos, quibus interjacent, scribe. Tum locum totum, rectis ab uno angulo A ad reliquos angulos mente designatis, in triangula partire. Expediet autem rudem (*b*) loci ichnographiam (nam exacta hìc non requiritur) in chartâ describere A B C D E F G, annotatâ juxta angulos, & latera singulorum quantitate, eamque, ut jam dixi, in triangula M,S,X,Z,N distribuere. Singula deinde triangula metienda hunc in modum.

Fig. 27. 28.

(a) *Per prob.* 4. *c.* 10.

(b) *Per prob.* 10. *c.* 10.

In triangulo M quia datur angulus G, & latera eum continentia A G, G F; ex his (*c*) reperietur latus A F unà cum angulo *o*, qui ad solutionem sequentis trianguli reservatur. Quoniam igitur nota sunt omnia latera trianguli M, id mensurabitur per prob. 5, vel 6. Eadem erit trianguli N dimensio. Intermedia triangula sic metiemur. Quia notus est totus angulus F, & pars ejus *o* suprà facta est nota, etiam reliquus Q notus erit. Quoniam igitur in triangulo S nota sunt latera EF ex hyp., & AF ex inventione suprà, notum angulum *q* continentia, ex his (*d*) reperietur latus tertium EA; ac proinde area trianguli S innotescet per prob. 5., vel 6. Ac simili planè modo mensurabuntur triangula reliqua intermedia X, Z. Colligantur tandem in unam summam singulorum triangulorum areæ jam inventæ, & prodibit area figuræ totius.

(c) *Per prob.* 10. *c.* 3.

(d) *Per idem.*

Digitized by Google

Rectas figuram datam parientes duxi ab uno omnes angulo, quia id erat ordinatiùs, non quia necessarium: & potest ea esse loci figura, ut debeant duci à diversis. Tum verò ferè similis est solutio triangulorum ex problemate rursum 10, vel 11.

Modus II.

Fig. 29. 30 Loco mensurando ABCDEFG circumscribe rectangulum IKLM, cujus excessum suprà aream, quæ metienda est, partire vel in triangula, vel in quadrangula, quæ bina habeant parallela latera, vel mixtim in simul utraque. Deinde metire totum rectangulum per probl. 1, & excessum ejus in triangula, ac quadrangula resolutum per prob. 3, & 4. Mensuras quadratas in excessu repertas aufer à mensuris quadratis repertis in rectangulo. Mensuræ quadratæ residuæ debentur areæ quæsitæ impervię.

Modus primus secundo præstat.

Scholium.

Ex hactenus constructis, & demonstratis habetur agrorum quorumcumque dimensio, quam multi dum exemplis adductis sibi videntur illustrare, ob ingentem farraginem numerorum obscurant potiùs, & intricant: numeri enim, quamvis in ipso opere mensionis evitari non possint, ad docendum tamen majori hìc impendio, quàm usu adferuntur.

Utrùm inventio angulorum per instrumentum sit exacta, ita si omnes sint interni, certò

co-

Digitized by Google

cognosces. Omnes angulos inventos collige in unam summam. Si ea non præcisè conficiat bis tot rectos demptis quatuor, quot latera habet figura mensuranda, anguli non erunt exactè inventi. Patet ex Theoremate 2. Scholii *post* prop. 32 lib. 1.

PROBLEMA IX.

Aream cujuslibet figuræ regularis invenire.

FIguram regularem datam referat BCDEFG: centrum sit A: radii ex centro ad angulos ducti AC, AB &c. Perpendicularis ex centro ad latus unum AO. Opus ita institue. *Fig. 31.*

Metire unum latus figuræ CB. Erit CO semissis (*a*) ipsius CB etiam nota. Quia in triangulo rectangulo AOC notum est latus CO, & acutus ACO (est enim semissis anguli DCB, qui repertus est *prob. 6 cap.* 10.) ex his (*b*) invenietur AO perpendicularis, quæ ducta in CO dabit (*c*) aream trianguli CAB. Hæc toties sumpta, quot sunt figuræ latera, dabit aream figuræ totius.

(a) *Per* 3. *lib.* 3.
(b) *Per prob.* 3. *c.* 3.
(c) *Per prob.* 4. *c.* 11.

Exemplum. Datum sit sexangulum ordinatum, cujus latus CB repertum sit pedum 20, semissis CO 10. Angulus DCB est (*d*) grad. 120, adeoque ACO grad. 60. Ex latere CO pedum 10, & acuto ACO grad. 60 reperitur (*e*) AO pedum 20, quibus ductis in CO 10, proveniunt pedes quadrati 200 pro area trianguli (*f*) CAB. Hæc sexies sumpta exhibet pedes quadratos 1200, quibus sexanguli dati area æqualis est.

(d) *Per prob* 6. *c.* 10.
(e) *Per prob.* 3 *c.* 3
(f) *Per prob.* 4. *c.* 11.

De-

Demonstrandum est, angulum A C O esse semissem anguli DCB, & figuram totam resolvi in tot æqualia triangula, quot sunt figuræ latera: cætera enim ex constructione patent. Quia triangula CAB, CAD sibi mutuò æquilatera
(i) Per tera sunt, erit (i) angulus A C B par angulo
8. 1. A C D (quod erat primum); & triangulum
(m) Per (m) C A B æquale triangulo H. Eodem modo
eand. erit H ipsi I, & I ipsi K, & K ipsi L, & L ipsi M, & M ipsi demùm C A B æquale. Quare omnia triangula dicta inter se æqualia sunt: quod erat alterum.

PROBLEMA X.

Quæ sit proportio inter latera regularium figurarum eidem circulo inscriptarum indagare.

Fig. 31. ID obtinebimus, si cujuslibet figuræ latus in partibus radii inveniatur.

Esto figuræ cujusvis ordinatæ latus C B. Ex centro ducatur ad C radius A C, (qui ponatur esse 100000) & perpendicularis A O. Angulus
(a) Patet centri CAB datur per prob. 6 cap. 10. Hujus
ex 8. 1. semissis (a) est OAC. Ergo etiam OAC datur.
(b) Per Ergo & Sinus ejus, qui est (b) OC; ac proinde
def. 6. c. 3. scitur quot partium sit C O, (adeoque & ejus dupla C B) quarum radius A C est 100000.

Hoc artificio confecta est tabella hic adjecta, quæ exhibet 9 primarum figurarum latera in partibus radii 10000000.

Ra-

Digitized by Google

Radius	100000000
III	17320508
IV	14142135
V	11755705
VI	10000000
VII	8677674
VIII	7653668
IX	6840402
X	6180339
XI	5634651
XII	5176380

Ludolphus supputavit latera polygonorum usque ad 81-angulum in partibus radii 100000, 00000, 00000; ex quo hæc tabella desumpta est numeris decurtatis.

PROBLEMA XI.

Quæ sit proportio inter areas figurarum regularium eidem circulo inscriptarum invenire.

Assequemur propositum, si areæ singularum reperiantur in quadratis partium radii. *Fig. 11.*

Figuræ ordinatæ cujuslibet latus esto CB, & sit radius AC, perpendicularis è centro AO. In triangulo rectangulo X angulus ACO est notus; est enim (c) semissis anguli DCB, qui datur per *prob. 6 cap.* 10. hujus AO (d) est Sinus; ac proinde scitur quot AO partium sit, quar-

(c) *Patet ex 8. 1.*
(d) *Per def. 6 c. 1.*

quarum radius AC est ex. gr. 10000000, sed & CO in iisdem radii partibus nota ex *problemate præcedenti*. Ergo AO nota in radii partibus ducta in CO semissem lateris CB, etiam notam in partibus iisdem radii; dabit aream trianguli CAB in quadratis earumdem radii partium, quæ toties sumpta, quot sunt figuræ latera, exhibebit in iisdem quadratis partium radii aream figuræ totius.

Inventâ hoc modo singularum figurarum magnitudine, manifesta est earumdem inter se proportio.

CAPUT XII.

Circuli dimensio, & quadratura veræ propinqua.

PROBLEMA I.

Proportionem circumferentiæ ad diametrum tam propinquam veræ, quàm libuerit, invenire.

Rationem circumferentiæ ad diametrum numeris exprimere primus ex omnibus Archimedes aggressus est. Inscripsit ille circulo polygonum ordinatum 96-laterum, atque alium huic simile circumscripsit: demonstravit deinde, perimetrum circumscripti continere minùs quàm diametros $3\frac{1}{7}$, sive $3\frac{10}{70}$, ambitum verò inscripti continere plus quàm diametros $3\frac{10}{71}$. Atque inde conclusit, etiam circuli circumferentiam, quæ ambitu circumscripti sibi polygoni minor est, inscripti verò major, conti-

Digitized by Google

tinere minùs quàm diametros $3\frac{1}{7}$, seu $3\frac{10}{70}$ plus verò quàm $3\frac{10}{71}$; ac proinde rationem circumferentiæ ad diametrum minorem esse quàm 22 ad 7; majorem verò quàm 223 ad 71; hoc est minorem quàm 1562 ad 497, majorem autem quàm 1561 ad 497.

Positâ igitur diametro	497.
erit circumferentia major verâ	1562.
& circumferentia minor verâ	1561.

Quare cum circumferentiæ hunc in modum inventæ differant inter se tantùm $\frac{1}{497}$ parte diametri; different à circumferentiâ verâ inter ipsas media minùs quàm $\frac{1}{497}$ diametri parte.

Modus appropinquandi.

Quod verò ad modum attinet, quo ex polygonorum inscriptorum, & conscriptorum collatione ad veram circumferentiæ cum diametro proportionem appropinquari in infinitum potest, is, prout ab Archimede instituitur, exactus quidem est, & certus, sed operosior aliquanto, & implicatior. Quare alium afferam magis expeditum, qui omnis ab hoc uno problemate deducatur: *dato Sinu cujus arcus, Sinum semisseos ejusdem arcus invenire*: cujus constructionem tradidi porismate 2 *cap.* 2. Ita ergo ratiocinabimur.

Inscriptum circulo sit latus hexagoni ordinati *c f* subtendens arcum *cbf* grad. 60, quod in *o* perpendiculariter secet diameter *Sab*. Erit ergo tam (a) recta *c f*, quàm (b) arcus *cbf* bisectus, hæc in *o*, ille in *b*; ac proinde *co* semissis lateris hexa- Fig. 32.

(a) 3. 3.
(b) 30. 3.

hexagonici *cf* est Sinus arcus *cb*, qui est grad. 30, cum sit semissis arcus *cbf* grad. 60. Quoniam igitur latus hexagoni ordinati circulo inscripti æquale (*d*) semidiametro est; positâ semidiametro partium 100000, erit lateris hexagonici semissis *co*, nempè Sinus grad. 30, earumdem partium 50000.

(d) 15.4.

Ex Sinu grad. 30 jam invento, reperietur *li* Sinus (*e*) semisseos, nempè grad. 15: & ex Sinu grad. 15 reperietur (*f*) Sinus grad. 7. 30': ex hoc verò Sinu grad. 3. 45'; ex illo autem Sinus grad. 1. 52' 30", qui est 327190 ½. Atque ita initio facto ab Sinu grad. 30, Sinus omnes per bisectiones continuas procedendo in infinitum reperientur in partibus semidiametri.

(e) per poris. 2. c. 2.

(f) per idem.

Quia porrò *co* Sinus grad. 30, est dimidium latus hexagoni, *li* Sinus ex bisectione primâ nempè grad. 15, erit dimidium latus dodecagoni; Sinus autem bisectionis secundæ grad. 7. 30' erit dimidium latus polygoni 24-anguli; Sinus verò bisectionis tertiæ grad. 3. 45', erit dimidium latus 48-anguli; & Sinus bisectionis quartæ grad. 1. 52' 30", erit latus dimidium 96-anguli circulo inscripti: atque eo deinceps in infinitum processu, Sinus bisectionum omnium reliquarum erunt latera dimidia polygonorum, quorum uniuscujusque numerus angulorum sive laterum semper duplo major est, quàm ejus quod ipsum antecessit. Quare cum Sinus prædicti noti jam sint in partibus semidiametri, etiam dimidia latera horum omnium polygonorum in iisdem semidiametri partibus nota erunt.

Quia verò est, ut dimidium latus alicujus polygoni ad semidiametrum, ita totum latus ad totam

Digitized by Google

totam diametrum, manifestum est, eos Sinus, qui exhibebant latera polygonorum dimidia in partibus ex. gr. 100000 semidiametri, exhibere latera integra in partibus æquè multis (100000) totius diametri. Atque eo modo latera integra polygonorum circulo inscriptorum 12-anguli, 24-anguli, 48-anguli, 96-anguli, atque ea deinceps in infinitum serie reperiuntur in partibus diametri. Quare si uniuscujusque polygoni latus per denominatorem polygoni multiplicetur, in iisdem diametri partibus nota erit perimeter polygoni tota. Cæterùm quò plurium erunt laterum polygona, eò pluribus etiam cyfris taxanda diameter erit: unde si usque ad 96-angulum diameter assumpta fuerit 100000, aut 10000000, pro 192-angulo, & sequentibus deinceps ea statuetur 100, 000000, aut 1000, 000000, & sic deinceps.

Inventâ perimetro inscripti polygoni, facilè erit perimetrum similis circumscripti invenire. Cujus enim arcus Sinus est dimidium latus *co* polygoni inscripti, ejusdem Tangens est *x b* dimidium latus polygoni conscripti: quod proinde per *prob.* 6. *cap.* 2 reperietur in partibus semidiametri, ac proinde totum latus *xz* in partibus æquè multis diametri totius: ut, si *xb* fuerit partium 2610523, quarum semidiameter *ab* est 10000000, etiam *xz* erit 2610523, quarum diameter *fb* est 10000000.

Proportio veræ proxima.

Hunc itaque in modum bisectione continuâ, crescente semper in duplum numero inscripto-

rum

Digitized by Google

tum, conscriptorumque laterum, ad proportionem veram sine termino appropinquabitur. Omnium hoc in genere conatus vicit laboriosissimus logista Ludolphus à Ceulen, qui initio facto à latere quadrati, bisectione sexagesies repetita, hos tandem limites assecutus est:

Diameter.

100000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000

Circumferentia minor verâ.

314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288.

Circumferentia major verâ

314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950289.

differentia utriusque est particula diametri denominata à numero, qui constat unitate, & circulis, sive cyfris 35, cujus ad diametrum proportio minor est, quàm unius arenulæ ad orbem terræ. Assumpsit porrò Ludolphus pro diametro respectu integrorum laterum, unitatem cum 72 circulis; unde circumferentiæ per eam acquisitæ constabant notis 73, sed omissis 37 primis, solas 36 posteriores retinuit. Ex quo apparet, quàm accurata proportionis suprà traditæ calculatio sit.

Ad usum proportionis à Ludolpho inventæ observa, diametro ad pauciores circulos taxatæ, ex. gr. ad 1 cum cyfris sex 1000000 respondere circumferentiam totidem postremis notis expressam 3141592, cujus defectus à verà sit minor unâ 1000000 diametri, & diametro existente 10, 000000, circumferentiam esse 31, 415926, cujus defectus sit minor unâ 10, 000000 diametri, & sic deinceps.

Digitized by Google

ceps. Quæ quidem ſcienti logiſticam decimalem ſunt manifeſta.

Ratio proxima veræ in numeris parvis, 355 ad 113.

Ea traditur ab Adriano Metio; neque alia ulla eſt ad uſum præſtantior, in minimis quippè terminis ad veram accedens quàm maximè. Quarum partium diameter eſt 113, earum eſt circumferentia 355 tam veræ propinqua, ut eam ne unâ quidem ejus quindecim-millioneſimâ parte excedat. Poſitâ enim diametro 10,000000, ſi fiat, ut 113 ad 355, ita 10,000000 ad aliud, proveniet circumferentia 31415929, cujus ſeptem notæ cum Ludolphæa conveniunt, ſolâ primâ 9 differente binario. Nam circumferentia 31415926, conſtans nimirùm 8 poſtremis notis Ludolphi, eſt minor verâ; quæ enim conſtat notis 36, poſtremâ exiſtente 8, eſt minor verâ. Atqui 2 eſt numeri 31415926 pars minor parte denominatâ à numero 15707963, ut dividendo patet. Ergo à fortiori 2 eſt veræ circumferentiæ pars minor, quàm denominata à numero 15707963; hoc eſt multò minor quàm una quindecim-millioneſima veræ circumferentiæ, ſeu una quinquemillioneſima diametri pars.

O PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Ad proportionem veræ proximam circumferentiæ cum diametro jam inventam aliâ viâ breviori pervenire.

Diligenter, & eruditè in Cyclometrico suo hoc argumentum tractavit Willebrordus Snellius, qui tamen majorem laudem tulisset, si duo præcipua Theoremata nempè 28, & 29, quibus res ea omnis innititur, demonstrasset. Non ita pridem de eodem argumento tractatum insignem edidit Christianus Hugenius, in quo præter alia præclara non pauca, duo illa Theoremata, quæ Snellius indemonstrata reliquerat, demonstravit.

Fig. 33. Primum erat ejusmodi: *circulum tangat recta B X; & diameter B S à tactu B educta producatur in R sic, ut R S sit par radio; & ex R ducatur recta circulum Secans, & Tangenti occurrens in X. Erit B X minor arcu B C.*

Fig. 35. Alterum verò tale; *Circulum tangat B H, & à tactu diameter educatur B S. Sit autem arcus B C triplus arcus S Q. Recta Q C abscindet à Tangente partem B H majorem arcu B C.*

Ex his magno calculi compendio ratio peripheriæ ad diametrum, quantumvis propinqua veræ, reperietur hunc in modum.

Mo-

Digitized by Google

Modus appropinquandi.

Ex Sinu grad. 30 (qui est semissis lateris hexagoni, hoc est per *prop.* 15 *lib.* 4 semissis radii) inveniatur, per *porif.* 2 *cap.* 2 Sinus grad. 15, & ex hoc Sinus grad. 7. 30', atque ita deinceps Sinus omnium arcuum sibi mutuò subduplorum, qui erunt dimidia latera 6-anguli, 12-anguli, 24-anguli, & poligonorum subsequentium circulo inscriptorum, quæ duplo semper plura habeant latera, & angulos, quàm quod præcessit.

Ducamus initium calculi ab inscripto 96-angulo, hujus latus dimidium est Sinus grad. 1. 52' 30'', qui modo jam dicto reperitur 327190828, quarum radius est 10000000000. Ex illo autem per *porismа* 1 *cap.* 2 reperitur Sinus complementi 9994645875. Inscriptum igitur circulo sit latus 96-anguli CF (*vide Fig.* 33) quo bisecto in O, per O ducatur diameter perpendicularis BAS, qua productâ in R sic, ut SR sit par radio AB, ex R per C, & F educantur rectæ circulum in B Tangenti occurrentes in X, & Z. Igitur CO Sinus grad. 1. 52' 30'', est 327190828: VC verò, sive AO Sinus complementi est 9994645875, quo addito ad AR, quæ est 20000000000, utpote diametro par, sit tota RO 29994645875. BR demùm cum sit par tribus radiis, erit 30000000000. Jam verò est (per 4. 6), ut RO 29994645875 ad OC 327190828, ita RB 30000000000 ad BX; quæ proinde per reg. proportionum reperitur 327249232, quarum semidiameter est

O 2 100000-

1000000000. Quare etiam tota Tangens XZ est 327249232, quarum tota diameter est 1000000000. Atqui Z X, per Snelii *Thor.* 1 suprà, est minor arcu CF, qui est pars 96 peripheriæ. Ergo etiam X Z 327249232 ducta in 96, nimirum 31415926272 minor est 96 arcubus C F, hoc est totâ circuli circumferentiâ.

Fig. 35. Terminus autem circumferentiâ major sic reperietur. Inscribatur rursum circulo Q L, latus 96-anguli; eoque bisecto in *K* per *K* ducatur diameter perpendicularis S A B. Sumatur autem arcus B C triplus arcus S Q, & B F triplus arcus SL: eritque arcus C B F 32[ma] pars peripheriæ, cum Q S L sit pars 96[ma]. Tangat deinde circulum in B recta H B Y, in H, & Y occurant rectæ per puncta Q, C, & L, F eductæ. Denique per L, & centrum A emissa recta occurat peripheriæ in I, Tangenti in X. Quoniam anguli L A S, I A B (*a*) æquales sunt, etiam arcus æquales (*b*) erunt. Ergo cum totus arcus B C sit triplus (*c*) arcus Q S, seu L S; erit reliquus I C duplus ipsius Q S, hoc est par toti Q S L. Ergo Q H, L A X sunt parallelæ. Sunt autem etiam parallelæ Q L, H Y. Ergo L Q H X est parallelogrammum. Ergo Q K L, duo nempè Sinus arcus Q S, æqualis est H X; B X verò est Tangens arcus B I, hoc est L S, hoc est Q S. Quare tota B H æquatur arcus Q S Tangenti, & Sinibus duobus. Atqui Sinus arcus Q S in primâ jam parte inventus est 327190828, cujus duplo 654381656 si addatur ejusdem arcus Q S Tangens, quæ per *Probl.* 6 *cap.* 2 reperitur 327366104, produce-

(a) 15. 1.
(b) 33. 6.
(c) *Per constr.*

ce-

cetur Tangens B H 981747760, quarum semidiameter est 10000000000. Quare etiam tota Tangens H Y erit 981747760, quarum diameter tota est 10000000000. Atqui H B Y major (o) est arcu C B F, qui est pars 32ma circumferentiæ. Ergo etiam H Y 981747760 trigesies bis sumpta, nempè 3141592832o major erit arcu C B F 32 bis sumpto, hoc est totâ circumferentiâ.

(o) Per Snellii th. 2. suprà.

Positâ igitur diametro 10000000000, circumferentia media est inter hosce terminos

3141592627 2
3141592832 0

qui cum Ludolphæis in septem notis postremis conveniunt, cum viâ Problematis præcedentis ex eodem 96-angulo inventi limites conveniant in notis solùm tribus.

Eodem artificio licebit ad veram circumferentiam appropinquare in infinitum: si nimirum pro acquisitione limitis minoris inscribatur latus 192-anguli, tum 384-anguli, & sic deinceps duplicando semper numerum angulorum, ac laterum: pro limitis autem majoris inventione, si B C semissis arcus C B F à novo inscripto latere subtensi in *Fig.* 33 transferatur in S Q, in *Fig.* 34, ejusque triplus accipiatur B C, ac cætera tum omnia peragantur ut prius.

Scholium.

Circa modum approximandi Problemate 1, & 2 jam explicatum, hæc observa.

1. *Quando limites, inter quos vera circumferentia concluditur, vel non possunt haberi exacti, quia acquiri debent per extractionem ex numero non quadrato, vel licèt exacti habeantur, tamen adhæret illis fractio, tunc pro limite minori assumi debet vero minor, & pro limite majori assumendus est vero major, aliàs inferre certò non poteris, circumferentiam, quæ inter limites media est, esse hoc minorem, illo majorem, aut certè æqual m utrilibet: quod tamen omninò necessarium esse liquet ex discursu ipso approximationis utriusque.*

2. *Quamvis approximationibus jam dictis, quantumvis sine termino continuatis, ad veram circumferentiæ cum diametro rationem perveniri nunquam possit; minimè tamen inde concluditur, circumferentiam, & diametrum incommensurabiles esse, cum ad proportiones etiam rationales quascumque possit sine termino appropinquari, sic ut nunquam, quantumvis approximando, pervenire ad ipsam possit.*

Etiamsi autem incommensurabiles magnitudines essent circumferentia, & diameter, sciant tyrones, quod aliàs suspicari forsan possent, nequaquam inde sequi, impossibilem esse lineam rectam circumferentiæ æqualem; cum in Geometriâ notissimum sit lineas rectas dari quæ inter se incommensurabiles existant.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA III.

Ex diametro circumferentiam, & ex circumferentia diametrum invenire quàm proximè.

DAta sit ex. gr. diameter orbis terræ, sive maximi terræ circuli, milliariorum Belgicorum 2759. Oporteat ex eâ terræ circumferentiam invenire.

Ex proportionibus diametri ad circumferentiam *Probl.* 1 allatis assumatur una. Terminus minor statuatur primo loco; major secundo; diameter data milliariorum Belg. 2759 tertio; quartus locus debetur circumferentiæ incognitæ. Sic ergo stabunt termini

Ut 7	Ad 22
Ita diametri datæ milliar. 2759	Ad circumferentiæ milliaria .....

Ut 113	Ad 355
Ita datæ diametri milliar. 2759	Ad circumferentiæ milliaria .....

Per regulam Trium ex proportione 7 ad 22, proveniet circumferentia 8671 $\frac{1}{7}$ milliariorum Belg., quæ excedit veram ferè unâ parte 497ma diametri ut initio *primi probl.* ostensum est.

Ex proportione autem 113 ad 355 proveniet circumferentia 8667 $\frac{74}{113}$ excedens veram minus quàm unâ diametri parte quinque millionesimâ, ut ostendi sub finem *Probl.* 1. Quare si milliaria diametri 2759, hoc est pedes Rhyn-

landici 49662000 dividantur per 5000000, reperietur circumferentia terrena sic inventa non integris 10 pedibus veram excedere. Ab hac autem circumferentiâ, quæ tantillo excessu peccat, prior illa milliariorum 8671 $\frac{3}{7}$, quæ ex ratione 7 ad 22 reperta fuit, differt circiter 4 milliariis Belgicis.

Quare proportio 113 ad 355 cum sit priori incomparabiliter veræ propinquior, semper erit adhibenda, cum exactum quid expetitur, & in circulis magnis.

Quod si adhuc amplior accuratio desideretur, ex terminis Ludolphæis accipe pro circumferentiâ postremas notas 9 aut 10, aut plures, si placuerit. Sumuntur plures notæ quàm 8; quia si tantum sumerentur 8, nimirùm 10000000, & 31415926, ferè nihil ampliùs obtinebitur quàm per 113,& 355; quæ, positâ diametro 10000000, exhibet septem notas Ludolphæas.

Ut ex circumferentiâ reperiatur diameter, statuere oportet primo loco terminum majorem 355; secundo minorem 113; tertio circumferentiam datam.

Ut 355	Ad 113,
Ita circumferentiæ milliaria 8667	Ad diametri quæsitæ milliaria .....

Ex inventâ ratione circumferentiæ ad diametrum Corollaria.

I.

Circulus ad quadratum suæ diametri, (hoc est

est quod ipsi est circumscriptum) eam ferè rationem habet, quam 355 ad 452.

Demonst. In selectis ex Archimede (quæ habes post *lib.* 12. elem. nostrorum) *cor.* 2 *prop.* 5 ostensum est, circulum esse ad quadratum circumscriptum, ut circumferentia est ad 4 diametros. Quare cum circumferentia (a) sit 355, quarum diameter est 113, cujus quadruplum est 452; liquet, circulum esse ad quadratum circumscriptum, ut 355 ad 452.

(a) *Vide prob.* 1.

Ex ratione Archimedæâ circumferentiæ ad diametrum, nempè 22 ad 7, elicitur ratio circuli ad quadratum diametri ea, quæ est 11 ad 14. Sed altera plus quàm millies exactior est.

II.

Circulus ad quadratum sibi inscriptum est ferè, ut 355 ad 226.

Demonstr. Nam quadratum (o) inscriptum dimidium est circumscripti. Quare cum circulus sit ad quadr. circumscriptum, ut 355 ad 452, idem erit ad circumscripti semissem, nempè ad quadr. inscriptum, ut 355 ad 226 semissem numeri 452.

(o) *Per coroll.* 7 4.

III.

Circulus ferè est ad quadratum circumferentiæ, ut 113 ad 1420.

Demonstr. Circulus æquatur (b) rectangulo sub quartâ parte diametri, & circumferentiâ. Ergo circulus est ad quadratum diametri (c) ut quarta pars diametri ad circumferentiam, sive ut tota diameter ad quatuor circumferentias. Qua-

(b) *Vide selecta nostra ex Archim. cor.* 1. *prop.* 5.
(c) *Per* 1. 6.

Quare cum diameter sit ad circumferentiam, ut 113 ad 355; si numeri 355 sumatur quadruplus 1420, erit circulus ad quadratum circumferentiæ, ut 113 ad 1420.

Ex Archimedæis terminis 22, & 7, proportio dicta elicitur 7 ad 88: Verùm prior plus millies accuratior est.

PROBLEMA IV.

Areæ circularis dimensio veræ proxima.

(a) *Per prob.* 3.
(b) *Per idem.*

NOtam fac in aliquâ mensurâ diametrum, atque ex eâ (*a*) circumferentiam elice. Aut si detur circumferentia, ex eâ (*b*) elice diametrum. Semissem diametri multiplica per semissem circumferentiæ. Productus numerus exhibet aream circuli in quadratis partium diametri, & circumferentiæ.

(c) *Per prob.* 3.

Exempl. Oporteat aream maximi Terræ circuli exhibere. Circumferentia maximi Terræ circuli est milliariorum Belgicorum (seu unius horæ) 8670, quam stabilivi *cap.* 6; hujus semissis est 4335. Ex hac (*c*) assumptâ ratione 355 ad 113 elicitur semidiameter $1379\frac{6}{71}$, sed fractio negligi potest. Ducatur semicircumferentia 4335 in semidiametrum 1379. Proveniunt milliaria Belgica quadrata 5977965, quibus maximus Terræ circulus æqualis est.

(d) *Per prob.* 2. *c.* 11.

Demonst. In selectis ex Archimede *prop.* 5. *Coroll.* 1 ostendi, circulum æquari rectangulo contento sub semidiametro, & semicircumferentiâ. Atqui rectanguli hujus capacitas producitur (*d*) ex multiplicatione laterum, quibus continetur, nimirùm semidiametri, & semicircumfe-

ferentiæ. Ergo & circuli capacitas ex eâdem multiplicatione proveniet.

PROBLEMA V.

Dati circuli circumferentiæ rectam lineam proximè æqualem exhibere.

INscribe circulo latus sexanguli CF, ad quod per A centrum ducatur perpendicularis diameter BAS, quæ continuetur in R, donec SR sit par radio. Ex R, per C, & F duc rectas RE, RG, quibus occurrat Tangens ZBX. Recta XZ sexies sumpta tam proximè æqualis est circumferentiæ, ut ab eâ superetur non integris 138 centimillesimis partibus diametri, hoc est minùs quàm $1^{'''}$ 3^{iv} 8^{v} vide *theor.* 1. *cap.* 10 nostræ Arithm. *Fig.* 36.

Quod si inscripseris *n m* latus duodecanguli, & cætera fiant ut priùs; erit Tangens KL duodecies accepta tam proximè æqualis circumferentiæ, ut ab eâ vix superetur unâ decimillesimâ parte diametri.

Demonstr. Per modum approximandi traditum *Probl.* 2. positâ diametro 100000, reperitur circumferentia verâ minor 314022, ea nimirùm, quæ constat ex rectâ XZ sexies sumptâ; major autem verâ elicitur 314160. Harum differentia cum sit 138, quarum diameter est 100000, manifestum est, minorem 314022, quæ componitur ex XZ sexies sumptâ, à circumferentiâ verâ excedi minùs quàm partibus 138, quarum diameter est 100000, hoc est paulò amplius quàm unâ millesimâ parte diametri.

Si-

Similis erit demonstratio pro latere duodecanguli *n m*. Nam ex ratiocinio Problematis 2 positâ diametro 10000000, circumferentia verâ minor constans 12 rectis K L reperitur 31415088; major autem verâ 31416200: quarum differentia cum sit 1112 decimillionesimæ diametri, patet circumferentiam verâ minorem, 12 nempè rectas *n m*, minus excedi ab ipsâ circumferentiâ verâ, quàm 1112 decimillionesimis diametri, hoc est (*o*) minùs, quàm $1^{iv}\ 1^{v}\ 1^{vi}\ 2^{vii}$ diametri

(o) Per theor. 1. c. 10. nostræ Arithm.

Aliter.

Fig. 34.

(a) Per 30. 3.

(b) Per 15. 4.

Ductâ utcumque diametro D E, secetur semiperipheria D A E (*a*) bifariam in A, reliqua trifariam (*b*) in B, & C. Duæ rectæ AF, FG Quadrantem circuli excedunt non unâ quinque millesimâ diametri. Construxit, & demonstravit Cristianus Hugenius *lib. de circuli magnitudine prop.* 11.

Aliter.

Diametro triplicatæ addatur una septima ejusdem. Tota recta sic composita excedet circumferentiam non una 497ma parte diametri, ut ostensum est suprà sub initium *Probl.* 1.

Aliter, & omnium optimè.

Triplicatæ diametro adde unam 16am ejusdem. Tota composita excedet circumferentiam non unâ quinquemillionesimâ parte diametri.

Nam

Nam si diameter ponatur 113, ea triplicata est 339, cui si addatur 16, fit circumferentia 355: quam esse tam exactam ostendi sub finem 1 problematis.

PROBLEMA VI.

Dato arcui rectam proximè æqualem

ARcus detur B Q, quem aliquoties bisecando resolve in partes æquales; donec una earum B *n* fiat minor sextâ parte circumferentiæ, & accedat ad duodecimam. Tum per B ducatur diameter B S, continueturque in R, donec S R sit par radio. Ex R per *n* ducatur recta, cui occurrat Tangens B L in L. Erit BL proximè æqualis arcui B *n*, ac proinde aliquoties accepta par toti arcui B Q. *Fig.* 36.

Patet ex demonstratis 5 *Problemate*, quamvis enim arcus B *n* non esset pars aliquota circumferentiæ totius, sive non subtendens latus alicujus polygoni ordinati, nihilominus clarum est, Tangentem B L ab eo insensibiliter differre.

Quando arcus datus est pars aliquota, ex.gr. octava totius circumferentiæ; tunc per *præced.* reperiatur recta toti circumferentiæ par: ejus pars exempli gratia octava erit par arcui dato.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VII.

Dato circulo, quadratum quàm proximè exhibere æquale.

Fig. 37. PEr *Problema* 5 dati circuli circumferentiæ æqualis inveniatur recta linea A C, quæ ponatur ad centrum A. Cum C A angulum rectum efficiat radius A B, ducaturque recta B C. Triangulum rectangulum BAC est æquale circulo tam exactè, quàm recta A C est æqualis peripheriæ.

Est Archimedis, & ostensum est à nobis in *selectis* ex eodem *thor. prop.* 5.

Vel rectangulum construe A G F B, cujus unum latus A G sit par dimidiæ peripheriæ, alterum A B æquale radio. Etiam hoc erit circulo æquale, est enim æquale triangulo A B C, ut patet ex 41. 1.

Ad quadraturam circuli satis est quamlibet figuram rectilineam circulo æqualem exhibere, omnes enim ad quadratum reducuntur per 16.2.

Aliter.

(n) Ex Coroll. 1. prop. 20. lib. 6.
(a) Per Coroll. 1. post prob 3
(d) Ostendi sub fin. probl. 1.

Ut 452 est ad 355, ita fiat (*n*) quadratum diametri ipsius circuli ad aliud quadratum, quod vocemus Z. Erit hoc circulo æquale quàm proximè.

Nam quadratum diametri (*a*) est ad circulum, ut 452 ad 355, sic (*d*) ut non peccetur unâ quinquemillionensimâ parte diametri. Sed quadratum diametri per constr. etiam est ad

ad quadratum Z, ut 452 ad 355. Ergo quadratum diametri eodem modo se habet ad circulum, & ad quadratum. Ea igitur (o) (o)Per 9 5.
æqualia sunt.

Reductiones circumferentiæ ad rectam lineam, ac proinde circuli ad quadratum per lineas curvas quadratricem, & spiralem, Theoriam quidem habent pulcherrimam; verùm ad praxim inutiles sunt, quod earum descriptio sit impedita, ac lubrica: & habet spiralis præterea difficultatem sibi propriam, quod ratio ducendæ Tangentis, quæ ad quadraturam requiritur, neque Geometricè, neque mechanicè sit inventa: sciunt verò Geometræ, quantus error committatur, si in Tangente, vel tantillo peccetur.

Scholium.

An quadratura, & dimensio circuli absoluta possibilis sit.

Dubitatum de hoc fuit, & olim à multis, & (opinor) etiam modo à nonnullis dubitatur, iis presertim, qui non admodum Geometriæ periti sunt. Occasionem dubitationi præbuit ingens Problematis difficultas, quæ bis mille annis propemodùm præcipua totius orbis ingenia nequidquam exercuit. Dubitantium argumenta, præter allatum jam præjudicium, hæc ferè sunt.

1. *Angulo semicirculi datur rectilineus angulus, & minor, acutus nempè quilibet, & major nimirum rectus; neque tamen ullus dari potest æqualis. Quamvis igitur lineâ circulari*

de-

Digitized by Google

detur recta linea minor, & recta linea major, consequens non est, ut dari possit etiam æqualis. Pari modo quamvis circulo dentur quadrata & minora, & majora, non sequitur dari posse etiam æquale.

2. Circulus, & quadratum, seu figura alia rectilinea sunt speciei diversæ. Ergo non possunt ad æqualitatem revocari.

Ad 1. Respondeo, si (quod fecere hactenus plerique) angulos fatearis esse quantos, urgere argumentum, cui proinde non facile fiat satis. Sin (quod mihi ad prop. 16. 3 *videor demonstrasse) anguli quanti non sint, argumentum ruere sponte suâ utpote falsâ nixum hypothesi. Falsum igitur est angulo semicirculi dari rectilineum angulum minorem, & majorem. Nullus enim angulus altero est major, vel minor, vel æqualis, ut ostendi loco citato, sed alter alteri similis, & dissimilis est. Non demonstravit igitur Euclides, angulum acutum quemvis esse minorem angulo semicirculi, sed unum latus acuti cadere semper intra circumferentiam, ex quo tantùm sequitur, acutum angulum esse dissimilem angulo semicirculi. Nequaquam igitur ab istis ostensum est, aut ostendi ab ullo potest, esse quidpiam ejusmodi, quo possit dari majus, & dari minus, neque tamen dari possit æquale.*

Ad 2. *Respondeo, mirari me ullum reperiri, qui vim aliquam inesse huic argumento putet, cùm prorsus manifestum sit, speciei diversitatem non officere ut æqualitas habeatur, nisi talis sit, quæ magnitudines inter se incomparabiles reddat, tum videlicet, cum una è duabus quotiescumque multiplicata nunquam potest alteram*

æquare

Digitized by Google

æquare, vel excedere. Liquet autem, rectam lineam toties sumi posse, ut circularem excedat, & quadratum ita posse augeri, ut circulum superet, ac proinde magnitudines esse comparabiles, & quarum aliqua sit ad invicem proportio.

Diversitas porrò specifica inter quadratum, & circulum hæc sola est, quod hìc superficies sit curvilinea, sive intra curvam lineam comprehensa, illud verò superficies rectilinea, quam nimirum rectæ lineæ ambiant. Atqui variæ superficies curvilineæ jam sunt quadratæ, Hippocrates enim Chius quadravit quasdam lunulas; & Parabolam Archimedes, & alii post illum. Deinde apud Pappum (a) *quadratur pars superficiei sphæricæ. Denique partem superficiei Cylindricæ quadravit P. Gregorius à S. Vincentio clarissimus Geometra Societatis nostræ operis sui* Geom. lib. 9, *& post illum ego, sed aliâ planè viâ*, Cylindric., & Annular. lib. 2 prop. 17, & 24.

(a) 30.

Aliâ etiam paritate objectionis inanitas evincitur. Tanta est diversitas inter superficiem planam, & curvam, quanta inter planam rectilineam, & planam curvilineam. Atqui superficies curva reducta est ad planam ab Archimede; is enim circulum exhibuit æqualem superficiei (b) *Cylindricæ*, (c) *conicæ*, (d) *sphæricæ. Ergo etiam plana superficies curvilinea, nempe circulus reduci potest ad rectilineam planam.*

Vide [...] nostr[...] Arch[...]

(b)
(c)
(d)

Atque hæc dicta sint ad objectiones partis negativæ, quæ ferè ejusmodi sunt, ut eas nequeas convellere, quin eâdem operâ quadraturæ possibilitatem evincas. Juvat nihilominus rem

Digitized by Google

adeò celebratam exactiùs demonstrare.

Quadratura circuli certò possibilis est.

Fig. 38. I. *Inscribe circulo quadratum ABCD, & aliud eidem circumscribe EFGH. Bisectis deinde singulis arcubus, inscribe octogonum AIBMCLDK, & aliud circumscribe ONVTSRQP. Si hoc modo duplicando semper laterum numeros, figuras circulo in infinitum inscripseris, & circumscripseris, perimetri inscriptarum, & conscriptarum figurarum & inter se, & multo magis ab ipsâ peripheria circuli mediâ differre poterunt* (a) *quantitate minori quavis datâ.*

(a) *Dem. in selectis ex Archim. prop. 3.*

Fig. 39. *Explicetur perimeter quadrati circumscripti in rectam AB; & perimeter quadrati inscripti in rectam AE: Perimeter item conscripti octogoni in rectam AC, perimeter verò octogoni inscripti in rectam AD. Atque ita sine termino cogitemus perimetros inscriptas, & circumscriptas in rectam lineam AB ex puncto A explicari. Differentia perimetrorum quadraticarum erit ED, Octogonicarum DC, & sic deinceps: quæ differentiæ quoniam* (b) *fiunt quacumque data minores, liquet, terminos perimetrorum hinc inscriptarum, inde conscriptarum ad invicem accedere ad intervallum quovis dato minus, quamvis nunquam se attingant. Ex quo manifestum est, esse terminum quemdam intermedium ex. gr. punctum O, ad quem perimetri inscriptæ semper crescendo, circumscriptæ verò semper decrescendo, nunquam pertingant, appropinquent tamen eidem ad intervallum dato quocumque minus:*

(b) *Ibid.*

ac

Digitized by Google

ac proinde est recta quæpiam AO major omni perimetro inscriptâ, omni verò circumscriptâ minor; in quam quasi in terminum perimetri inscriptæ semper crescendo, & perimetri circumscriptæ semper decrescendo desinant. Hæc igitur recta linea AO circumferentiæ circuli necessariò æqualis est, cum etiam eodem modo inscriptæ, ac circumscriptæ peripheriæ desinant in ipsam circumferentiam.

II. Difficultas quadraturæ reducta est ad magnitudines homogeneas. Nullum autem dubium esse potest, quin duarum magnitudinum homogenearum aliqua sit proportio, quæ proinde possit exprimi rectis lineis, & æqualitas inter eas reperiri.

Demonstravi lib. 4. Cyl., & Annul. prop. 42, *circumferentiam circuli esse ad diametrum, ut superficies annuli clausi est ad superficiem sphæræ sibi inscriptæ. Atqui superficies annuli, ac sphæræ prorsus homogeneæ sunt, cum ambæ genitæ sint ab eâdem circuli circumferentiâ circulariter motâ, ac proinde earum aliqua proportio est, quæ possit rectis lineis explicari. Ergo & circumferentiæ ad diametrum proportio est aliqua, & per rectas lineas explicabilis.*

III. Rursum lib. 3 Cyl., & Annul. prop. 32, & 34 *demonstravimus, annulum clausum circularem esse ad inscriptam sibi sphæram, & ellipticum ad inscriptam sibi spheroidem, ut circumferentia circuli est ad duas tertias partes diametri. Atqui annulus, & sphæra sunt corpora homogenea, fiunt enim ab eodem circulo circulariter moto, adeoque proportio eorum cognosci, & rectis lineis explicari*

Digitized by Google

poteſt. Ergo etiam proportio circumferentiæ ad rectam.

Quod autem ratio annuli ad ſphæram invenibilis ſit, ſic ulteriùs oſtendo. Tam ſunt homogenea corpora annulus circularis, & ſphæra ei inſcripta, quàm annulus clauſus parabolicus, & inſcripta ipſi conois parabolica. Atqui horum proportio exhibita à me fuit lib 4. Cyl., & Annul. prop. 46 *eſt enim ea, quæ eſt* 16 *ad* 3. *Ergo etiam ratio circularis annuli ad inſcriptam ipſi ſphæram reperiri poteſt, & explicari, ſi non per numeros, certè (quod ſatis eſt) per rectas lineas.*

IV. Exterior annuli pars, quæ gignitur à ſemicirculo exteriore, & pars interior annuli, quæ fit à ſemicirculo interiore, ſunt corpora prorſus homogenea, cum ſint producta ab æqualibus ſemicirculis circulariter motis. Ergo aliqua eſt eorum proportio, quæ proinde cognoſcibilis eſt, ſed lib. 3. Cyl., & Ann. prop. 49 *demonſtravimus, eâ proportione inventâ haberi quadraturam. Quadratura igitur poſſibilis eſt.*

Quod autem exhiberi poſſit ratio, quam habet pars exterior circularis annuli ad interiorem, inde ulteriùs fit manifeſtum, quod inventa à me ſit (c) *ratio, quam habet annuli clauſi parabolici pars exterior ad interiorem, eſt enim eadem, quæ* 11 *ad* 5. *Sunt verò utriuſque annuli partes æqualiter homogeneæ.*

(c) *lib.* 3. *Cyl, & annul. prop.* 28.

V. Major eſt diverſitas inter annulum parabolicum, vel hyperbolicum, & ſphæram, quàm inter annulum circularem, & ſphæram. Atqui annulo parabolico exhiberi poteſt ſphæra æqualis per prop. noſtram 46 lib. 4. Cyl., &

Annul.

Digitized by Google

Annul. *Hyperbolici autem annuli parti interiori sphæram æqualem exhibui* lib. 5. Cyl, & Annul. prop. 45. *Ergo etiam circulari annulo exhiberi potest sphæra æqualis, adeoque & Cylindrus, ut colligitur ex* p. 22. Selectorum ex Archimede theorematum. *Atqui habito Cylindro, qui æqualis sit circulari annulo, habetur linea recta æqualis circumferentiæ circuli, ut patet ex* prop. 5. lib. 3 Cyl., & Annul. *Ergo dari potest linea recta circumferentiæ æqualis.*

Finis non sit, si colligere omnia voluero, quæ ex nostris quinque libris Cylindricorum, & Annularium huc spectant. Eò remittimus lectorem, qui plura desiderat.

VI. Semicirculus æquè habet centrum gravitatis ac triangulum, & figuræ cæteræ. Ergo illud in semicirculo cognoscibile est perinde ac in aliis, in quibus id jam est repertum. Atqui dato centro gravitatis semicirculi, datur ejus quadratura, ut demonstratum est à Joanne la Faille, Guldino, Hugenio, & nobis lib. 5. Cyl., & Annularium. *Ubi demonstravimus* prop. 31, *circumferentiam, cujus radius est distantia centri gravitatis semiellipseos à centro figuræ, esse ad quatuor tertias axis, qui semiellipseos basis est, ut alter axis ad axem priorem, &* prop. 32. *circumferentiam, cujus radius est distantia centri gravitatis semicirculi à centro communi, ostendi esse ad diametrum semicirculi, ut 4 ad 3, &* prop. 33 *demonstravi, circumferentiam circuli, cujus radius est distantia centri gravitatis semicircumferentiæ à centro communi, duplam esse diametri. Ergo circuli quadratura possibilis est.*

Aliis innumeris propè viis eadem veritas demonstrari potest. Sed abundè sufficiunt quæ jam attulimus. Id solùm addo breviter, tam certum esse, circumferentiæ aliquam dari posse rectam lineam æqualem, & circulo aliquod æquale quadratum, quàm certum est, inter ea aliquam esse proportionem; esse verò proportionem æquè certum est, quàm, datâ circumferentiâ exhiberi posse rectas majores, & minores, & circulo dato quadrata majora, & minora. Ea enim inter se proportionem habent, quæ aliquoties sumpta se mutuò possunt excedere.

Denique admonendi hìc sunt qui Geometriæ non satis periti sibi persuadent, ad quadraturam necessarium esse, ut ratio lineæ circularis ad rectam, aut circuli ad quadratum in numeris exhibeatur. Is sanè error valdè crassus est, & indignus Geometrâ, quamvis enim irrationalis esset ea proportio; modò in rectis lineis exhibeatur, reperta erit quadratura. Sit enim circumferentia ad diametrum, ut linea A ad B, sive A, & B commensurabiles sint, sive non. Per 12. 6 fiat, ut B ad A, sic diameter ad rectam quampiam Z. Erit hæc æqualis circumferentiæ. Nam cum ex hyp. Diameter sit ad circumferentiam, ut B ad A, ex constr. autem eadem diameter sit ad rectam Z, etiam ut B ad A, habebit diameter ad circumferentiam, & ad rectam Z eandem rationem. Ergo per 9. 5 circumferentia, & recta Z æquales sunt.

Circumf.	*A*——
Diam.	*B*—

PRO-

PROBLEMA VIII.

Quadratura partium circuli veræ proxima.

DAtus sit sector ABDC. Per *Probl.* 6 arcui BDC reperiatur recta Z æqualis. Triangulum rectangulum, cujus altitudo est radius AB, basis verò recta Z, æquatur sectori dato. *Fig. 49.*

Demonst. Nam triangulum, cujus altitudo est radius, basis verò peripheria tota, æquatur toti circulo. Ergo triangulum, cujus altitudo est radius, basis verò arcus BDC, æquatur sectori BDC. Duo enim illa triangula sunt inter se (*a*) ut bases, hoc est ut (*b*) circulus ad sectorem. Cum ergo circulus sit æqualis uni triangulo, sector erit æqualis alteri.

(a) *Per* 1. 6.
(b) *Per* 33. 6.

Detur deinde segmentum circuli BDC. Sectori ABDC fiat æquale triangulum, ut jam docui: ab hoc dematur triangulum ABC, reliquum erit æquale sectori.

PROBLEMA IX.

Partium circuli dimensio.

MEtiendus sit sector, sive is sit minor semicirculo, ut ABDC, sive major, ut ABFCA. *Fig. 40.*

Metire arcum sectoris, & radium AB: semissis producti ex radio in arcum ducto dabit mensuras quadratas, quibus sector æqualis est.

Digitized by Google

Exempl. arcus sectoris esto pedum 200, radius 80. 200 in 80 efficiunt 16000, quorum semissis est 8000. Igitur sectoris area continet pedes quadratos 8000.

Demonstratio patet ex præcedenti. Sector enim æquatur triangulo, cujus altitudo est radius, basis verò arcus sectoris; hoc verò triangulum dimidium (c) est rectanguli sub eâdem altitudine, ac base contenti. Atqui productum ex multiplicatione altitudinis in basim (hoc est radii in arcum) exhibet (o) aream dicti rectanguli. Ergo producti illius semissis exhibet aream trianguli, hoc est sectoris quæsiti.

(c) *Per* 41. *lib* 1.

(o) *Per probl.* 1. *cap.* 11.

PROBLEMA X.

Ellipseos, & parabolæ dimensio.

Fig. 41.

INter duos ellipseos axes AB, CD reperiatur media (a) proportionalis EF; & circa eam describatur circulus, quem (b) metire; esse enim ellipsi æqualem demonstravit Archimedes.

(a) *Per* 13. *lib* 6.

(b) *Per prob.* 4.

Fig 42.

Et quoniam ab eodem demonstratum est, parabolam maximi inscripti trianguli esse sesquiquartam, sive ad illud esse, ut 4 ad 3; neque hujus ignota poterit esse dimensio: Fiat enim BG ad BC, ut 4 ad 3, ducaturque AG. Erit triangulum quoque BAG ad (c) triangulum BAC, ut 4 ad 3, ac proinde æquale parabolæ BDAEC. Quare si nota fiat (n) area trianguli BAG, etiam area parabolæ nota erit.

(c) *Per* 1. 6.

(n) *Per prob.* 4. *c.* 11.

CA-

Digitized by Google

CAPUT XIII.

Figurarum planarum transformatio, additio, subtractio, auctio vel diminutio, comparatio.

PROBLEMA I.

Figuras alias in alias transformare.

TRansmutatio figurarum rectilinearum plenè tradita est in Elementis.

Triangulo dato exhibetur æquale parallelogrammum habens angulum datum, *prop.* 42 *lib.* 1.

Et *prop.* 44 dato triangulo fit æquale parallelogrammum, quod præter datum angulum, etiam latus habeat datum.

Deinde *prop.* 45. Dato cuicumque rectilineo fit æquale parallelogrammum habens angulum, & latus data.

In libro autem secundo *prop.* 14 parallelogrammum, ac proinde rectilineum quodcumque reducitur ad æquale quadratum.

Denique *libro* 6 *prop.* 25; quæ omnium hoc in genere universalissima, & pulcherrima est, describitur figura, quæ sit magnitudinis datæ, & similis alteri figuræ datæ; ac proinde quælibet in quamlibet transformatur.

De conversione circuli in quadratum tractavi cap. præced.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Datas quotvis figuras rectilineas in unam specie datam colligere.

DEntur ex. gr. tria triangula, duo quadrata, & unum pentagonum, seu quinque-angulum; & oporteat his omnibus æquale sexangulum ordinatum construere.

Figuris datis in triangula, vel quadrangula resolutis, (a) fac iis omnibus unum æquale rectangulum. Huic autem (b) construatur æquale sexangulum ordinatum. Id quæsito satisfaciet.

(a) Per 45, vel schol. p. 16. lib. 1.
(b) Per. 25.6.elem & prob. 7. c. 10.

PROBLEMA III.

Datis quotcumque figuris similibus, unam omnibus æqualem, ac similem exhibere.

Fig. 43. 44.

DEntur ex. gr. tres circuli A, B, C. Petitur unus æqualis omnibus. Circuli porrò inter figuras similes computantur, sunt enim inter se in duplicata ratione diametrorum, per 2. 12.

Fac angulum rectum EFM lateribus infinitis. Fiat FI par radio circuli A, & FL par radio circuli B, ducaturque IL. Erit circulus radio IL descriptus (c) æqualis duobus A, & B. Transfer IL ex F in M, & fac FK parem radio circuli C, ducaturque KM. Erit circulus D descriptus radio KM æqualis tribus circulis A, B, C.

(c) Per 31. 6.

Demon.

Digitized by Google

Demonst. Nam circulus radii KM (*d*) æquatur circulis radiorum KF, MF; quorum unus, qui describitur radio MF, æquatur (*o*) circulo radii IL, hoc est duobus circulis radiorum (*k*) LF, IF. Ergo circulus radii KM æquatur tribus circulis radiorum, nempè KF, LF, IF; hoc est tribus datis C, B, A.

(d) *Per* 31. 6. (o) *per const.* (k) *per* 31. 6.

Fig. 46.

Si plures dentur circuli, quàm tres, eadem constructio continuata dabit unum omnibus æqualem.

Quemadmodum verò artificio jam explicato reperitur radius circuli, qui pluribus datis æqualis sit; ita eodem, si aliæ dentur figuræ similes quàm circuli, reperietur latus figuræ similis per 18.6 *construendæ, quæ illis omnibus æqualis sit.*

PROBLEMA IV.

Progressioni infinitarum similium figurarum in eâdem proportione decrescentium unam omnibus æqualem exhibere.

DAta sit ex. gr. progressio infinitorum circulorum in quacumque proportione, sed eâdem semper, decrescentium; & oporteat unum omnibus exhibere æqualem.

Fiat (*m*) CF æqualis tertii circuli diametro DE. Tum ut AF ad AC, ita fiat AC ad X. Inter AC & X reperi (*n*) mediam proportionalem Z. Circulus diametro Z descriptus infinitis circulis progressionis datæ æqualis est.

(m) *per* 12.6. (n) *per* 13. 6.

Demon. Intra primum circulum OB describe circulum OR parem secundo PQ; eritque an-

Fig. 46. annulus N excessus primi suprà secundum. Jam quia circuli per hypothesim sunt continuè proportionales, etiam diametri eorum AC,
(a) *Patet ex* 22. 6 CD, DE, &c. (*a*) continuè proportionales sunt; ac proinde ratio AC ad DE duplicata
(b) *per defin.* 10. 5. (*b*) est rationis AC ad CD. Ergo primus circulus OB
(c) *per* 2. 12. (*c*) est ad secundum PQ, sive OR, ut AC ad DE, sive
(d) *constr.* (*d*) FC. Ergo dividendo, invertendo, componendo, & rursum invertendo, annulus N est ad circulum OB, ut AF est ad AC. Atqui per constr. etiam est, ut AF ad AC, ita AC ad X. Ergo annulus N est ad circulum OB, ut AC ad X. Sed quia AC, Z, X sunt
(e) *per constr.* (*e*) proportionales, circulus OB etiam est ad circulum diametri Z, ut
(f) *per* 2. 12. *& def.* 10. 5. (*f*) AC est ad X. Ergo annulus N (excessus primi circuli OB suprà secundum OR, sive PQ) est ad primum circulum OB, ut idem primus circulus OB est ad circulum diametri Z. Ergo per theorema scholii post *prop.* 11. *lib.* 6. circulus diametri Z toti infinitorum circulorum progressioni æqualis est.

Corollarium.

Fig. 46. Quod si circulum desideras, cujus circumferentia infinitorum illorum circulorum circumferentiis æqualis sit; fiat ut primæ diametri AC suprà secundam CD excessus ad primam AD,
(a) *per* 12. 6. (*a*) ita eadem prima ad aliam rectam AV. Circumferentia ex diametro AV descripta infinitis progressionis datæ circumferentiis æqualis est.

Demonstratio. Per theorema Scholii post 11. *lib.* 12. recta AV infinitis diametris progres-

gressionis AC, CD æqualis est. Jam peripheria diametri AV est ad peripheriam B, (b) ut diameter AV ad diametrum AC. Rursum peripheria ex AV est ad peripheriam (c) Q, ut diameter AV est ad diametrum CD: atque ita semper. Ergo peripheria ex AV (d) est ad omnes totius progressionis peripherias, ut diameter AV est ad omnes progressionis diametros. Atqui AV omnibus progressionis diametris ostensa est æqualis. Ergo etiam peripheria ex diametro AV descripta omnibus progressionis peripheriis æqualis est.

(b) *per p. 7. select. ex Archim. theor.*
(c) *Per eamd.*
(d) *per 24. 5.*

Scholium.

De progressionibus Geometricis librum pulcherrimum, subtilissimumque scripsit noster Gregorius à S. Vincentio, ad quem lectores remitto. In gratiam porrò tyronum ad prop. 11 lib. 6 elem. *progressionum theoriam breviter demonstravi: & ad* prop. 25. lib. 9 *in Arithm. nostrâ ostendi, facillimum esse transitum à progressione finitâ ad infinitam. Quod ipsum adhuc clariùs ostendi Arithm. practicæ* lib. 5. cap. 4. prop. 18, 19, 20, & cap. 5. prop. 7, 8, 9, 10, 11.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA V.

Figuræ datæ aliam similem in datâ proportione majorem, vel minorem exhibere: sive figuram datam juxta proportionem datam augere, vel minuere.

Fig 45. DAtus sit circulus B E, vel quodcumque rectilineum, & oporteat ex. gr. circulum, vel rectilineum simile dati quintuplum reperire.

Circuli dati radio, sive figuræ datæ lateri AB apponatur in directum BC quintupla ipsius (a) per 13. 6. AB. Inter AB, BC reperiatur (*a*) media proportionalis BD: circulus hoc radio descriptus erit quintuplus dati BE, & figura data similis suprà hoc latus per 18. 6 descripta erit quintupla datæ.

Demonstr. Quia ex const. AB, BD, BC sunt proportionales, erit ratio AB, ad BC duplica- (b) def. 10. 5. ta (*b*) rationis AB ad BD. Atqui ratio circuli (c) per 2. 12. B E ad circulum B F est duplicata (*c*) rationis radii AB ad radium BD; & ratio figuræ, cujus latus AB, ad figuram similem, cujus latus BD, (d) per eamd. est duplicata (*d*) rationis lateris A B ad latus B D. Ergo circulus BE est ad circulum B F, & figura ex AB est ad similem ex B D, ut AB ad BC: hoc est per constr. ut 1 ad 5.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

Similium figurarum proportionem cognoſcere, ſive earum magnitudines comparare.

DUobus homologis lateribus figurarum reperiatur tertium proportionale per 11.6, ſi incommenſurabilia ſint; vel per 18.9, ſi commenſurabilia. Ut primum latus ad tertium, ita figura prima eſt ad figuram ſecundam. Patet ex 20. 6.

Exemplum 1. Dentur duæ quadratæ areæ; primæ latus ſit 1 perticæ, latus ſecundæ perticarum 3: hæc illâ eſt major novies. Cum enim lateribus, quæ ſunt 1, 3, tertium proportionale ſit 9, erit ut latus primum nempè 1 ad tertium 9, ita area prima ad ſecundam.

| 1. 3. 9 |

Exempl. 2. Dantur binæ circulares areæ: primæ diameter eſt 1 perticæ, ſecundæ 10. Quantò hæc illâ major eſt? Fiat ut 1 ad 10, ita 10 ad 100. Prima ergo eſt ad ſecundam, ut 1 ad 100, ac proinde hæc illâ eſt major centies.

| 1. 10. 100 |

Exempl. 3. Sint areæ duæ ſimiles figuræ cujuſcumque; latus primæ ſit decempedarum 5, latus homologum ſecundæ decempedarum 6. Quanto ſecunda major eſt primâ? Lateribus 5, & 6 per 18. 9 reperitur tertium proportionale 7 $\frac{1}{5}$. Ergo area prima eſt ad ſecundam, ut 5 ad 7 $\frac{1}{5}$.

| 5. 6. 7. $\frac{1}{5}$ |

Ex

Ex his cernitur, quantopere falli in æstimandis, & comparandis superficierum quantitatibus Geometriæ imperitos necesse sit.

Proportio corporum similium cognoscetur ex *prop.* 14. *cap.* 21.

PROBLEMA VII.

Arearum dissimilium proportionem cognoscere.

SI areæ dissimiles datæ sint duo triangula, aut duo parallelogramma, ratio earum invenitur per *Corol.* 3. *prop.* 23. *lib.* 6.

Modus generalis pro quibusvis areis dissimilibus hic est: per 45. 1, aut per Scholium *prop.* 16. *lib.* 2 areæ datæ reducantur ad rectangula æquè alta. Quæ est ratio inter bases horum rectangulorum, eadem (*a*) est inter ipsa rectangula, adeoque & inter datas areas his (*b*) æquales.

(a) *per* 1. 6.
(b) *per conft.*

PROBLEMA VIII.

Superficiem minorem à majori altera subtrahere.

SI similes sunt, habetur intentum per *Probl.* 2. *Scholii* post 47. 1 quod licèt ad sola quadrata isthic pertineat, universale reddes per 31. 6.

Si dissimiles, reducantur ambæ ad rectangula (*c*) æquè alta, tunc enim ex 1. 6 liquet subductionis modus.

(c) *Per* 45. 1. *vel per schol. p.* 16. *l.* 2.

DE

DE FIGURARUM
Rectilinearum sectione.

CAPUT XIV.

Sectio trianguli per punctum datum.

CUm hujus sectionis modum à nullo hactenus perfectè traditum animadverterem, integrum de eo tractatum scripsi: quem & seorsim edere in lucem statueram. Verùm, mutato deinde consilio, in hunc Geometriæ Practicæ locum ipsi quodammodò proprium rejeci.

PRÆFATIO.



Mirabuntur fortasse, qui ista lecturi sunt, quod ejus problematis tractationem susceperim, cujus ab aliis jam pridem data sit solutio. Id sanè verum si est, & justa illorum admiratio erit, & labor meus aut superfluus, aut certè non admodum necessarius. Sed longè aliter se res habet.

Trianguli secundùm rationem datam sectio ex puncto dato tres casus complectitur. Primus est, cum punctum datur in ambitu trian-

Digitized by Google

guli: tum verò facilis, atque obvia problematis solutio est.

Fig. 47. Nam si in perimetro trigoni A B C datum sit punctum G, ex angulo adjacente A, qui à puncto G est non remotior altero C, dividatur triangulum secundùm rationem datam, rectâ AD per 1.6; sic ut pars minor (si ratio data sit majoris ad minus) cadat versùs punctum datum G. Deinde ex ipsius AD termino D ad G ducatur recta D G; cui ex A fiat parallela AF occurrens lateri B C in F. Ex G ad F ducta recta secabit triangulum in partes datam habentes proportionem.

(a) Per 1. 6.

Cum enim AF, GD sint per constr. parallelæ, triangula (d) GAD, DFG æqualia sunt. Quare ablato communi GOD, reliqua AOG, FOD æqualia erunt: quibus addito communi trapezio GODC, æqualia erunt triangula ADC, G F C. Quare etiam residuæ totius A B C, trianguli partes D A B, & A G F B æquales sunt. Atqui per constr. A D C ad D A B datam habet rationem. Ergo etiam G F C ad A G F B datam habet rationem. Igitur ex dato in ambitu puncto G sectum est triangulum, ut petebatur. Quod autem A F parallela ad D G non cadat extra triangulum, sic ostendo: cum ex constr. A G sit non major, quàm GC, etiam FD erit non major quàm D C. Sed D C est ex constr. non major quàm B D. Ergo etiam F D est non major quàm B D; adeoque G F extra triangulum non cadit.

(d) Per 37 1.

At præter hunc primum casum alii præterea duo supersunt, quorum solutio haud paulò majus artificium requirit; videlicet quando punctum datum extra triangulum est, vel intra

tra

Digitized by Google

tra illud. Et quidem cum punctum extra triangulum datur, subtiliter, & ingeniosè à Geometris non paucis quæsita sectio peracta est. At verò, puncto intra triangulum dato, qui plenam, hoc est universalem hujus problematis solutionem exhiberet, reperire hactenùs nullum potui. Causa difficultatis est, quod casus ille postremus determinationes satis multas, easque non vulgares, aut obvias comprehendat, quas qui ignoraverit, non erit mirum si ad veram is solutionem minimè pertingat. Quæ cum ita sint nec ingratum, nec inutile Geometriæ studiosis futurum putavi, si adæquatam hujus problematis solutionem, prout à me inventa fuit, prælo committerem. Id verò eò etiam feci libentiùs, quod determinatio dati problematis alia non pauca seu theoremata, seu problemata secum intimè connexa, involvat, ferè haud minùs, vel jucunda, vel digna scitu quàm ipsum illud, cujus gratiâ inventa sunt. Omnium seriem sequens synopsis exhibet.



Digitized by Google

SYNOPSIS

PARS I.

De sectione trianguli ex puncto dato extra triangulum.

PRimùm à dato angulo ex puncto extra ipsum dato triangulum datæ magnitudinis abscinditur. *Prop*. 4.

Atque hinc deinde datum triangulum secundùm datam rationem dividitur ex puncto extra triangulum dato. *Prop*. 5.

PARS II.

De sectione trianguli ex puncto intra triangulum dato.

A Dato angulo per punctum intra ipsum datum triangulum minimùm abscinditur. *Prop*. 8.

A dato angulo per datum intra ipsum punctum abscinditur triangulum magnitudinis datæ. *Prop*. 10.

Pars minima, quæ per datum punctum à triangulo abscindi potest, non trapezium, sed triangulum est. *Prop*. 11.

A dato triangulo per punctum intra ipsum datum pars minima, seu minimum triangulum abscinditur. *Prop*. 13.

Intra quodvis triangulum datur punctum, ipsum

ipsum videlicet centrum gravitatis, per quod tria minima triangula inter se æqualia abscindi possunt. *Prop.* 14.

Si in triangulo quovis ab angulorum uno ducatur recta B L bifariam secans latus oppositum, ex eâque sumatur pars tertia L E, & dimidia L O; per quodvis punctum inter E, & O abscindi possunt duo minima triangula inter se æqualia *Prop.* 15. *Vide Fig.* 72.

Postremo datum triangulum per datum intra illud punctum secatur in partes, quæ datam inter se habeant proportionem. *Prop.* 20.

PARS I.

De sectione trianguli ex puncto extra ipsum dato.

LEMMA I.

PROPOSITIO I.

A, dato angulo E A F per datum in latere punctum D triangulum abscindere æquale dato G K H

Fiat ut D A ad G H, ita I K altitudo ad A C, quæ perpendiculariter ponatur ad F A, & per C ducatur C B parallela ad A F secans A E in B, ducaturque recta D B. *Fig.* 48. 49

Digitized by Google

Erit triangulum D A B æquale dato G K A. Demonſtratio patet ex *Corollar.* 15. 6.

LEMMA II. PROPOSITIO II.

Fig. 50. 51 Data ſit recta infinita N Z bis ſecta in A, & K. Oporteat eam tertiò ſecare in E, ut N K, A E, N E ſint proportionales.

(a) *Patet ex* 31. 3, *& Coroll.* 2. *p.* 8. *l.* 6.

CONſtr. Inter N K, N A inveni mediam proportionalem N H, quod fiet (*a*) ſi ex A in *Fig.* 50 ex K in *Fig.* 51 erigatur perpendicularis, & N K in *Fig.* 50, N A verò in *Fig.* 51 biſectâ in O, centro O per N deſcribatur circulus occurrens perpendiculari in H, jungaturque N H. Ex H erige ad H N perpendicularem H L, parem K I ſemiſſis ipſius K N. Centro L per H deſcribe circulum, qui tanget per 16. 3 rectam N H in H, & per N, ac L duc rectam N P. Abſcinde ipſi N P ex A in E æqualem A E. Dico N K, A E, N E eſſe proportionales.

(b) *Per* 17. 6.
(c) *Per* 36. 3.
(o) *Per* 1. 2.
(n) *per* 2. 2.

Demonſtratio. Rectangulum A N K æquale eſt (*b*) quadrato mediæ H N; hoc eſt rectangulo (*c*) P N M. Rectangulum quoque ſub E A, K N æquatur ipſi N P M, ſunt enim æquales E A, N P, & K N, P M ex conſtructione. Ergo duo rectangula A N K, & E A, K N (hoc eſt (*o*) ipſum E N K) æquantur duobus P N M, & N P M, hoc eſt (*n*) quadrato N P. Sed N P eſt A E per conſtr.

Digitized by Google

constr. Ergo E N K rectang. quadrato A E æquale est. Ergo sunt (*m*) proportionales N K, A E, N E. Quod erat propositum.

(m) Per 17. 6.

LEMMA III. PROPOSITIO III.

Data sit recta infinita Z N secta in K, oporteat eam secare in E, ut N K, K E, N E sint proportionales.

Fig. 52.

COnstr. Ex K erige perpendiculariter K L parem dimidiæ KN. Centro L per K describe circulum, & per N, L duc N P. Hæc ponatur ex K in E. Erunt N K, K E, N E proportionales.

Demonstratio. Quadr. K E æquatur quadrato N P ex constr. hoc est (*a*) rectangulis P N M, & N P M. Sed P N M (*b*) æquatur quadrato Tangentis N K, & N P M æquatur ipsi E K N (nam (*c*) N P est E K, & M P est K N) Ergo quadr. K E æquatur quadrato K N, & rectangulo E K N, hoc est (*d*) ipsi E N K. Ego proportionales sunt E N, E K, K N.

(a) Per 2. 2.
(b) Per 36. 3.
(c) Per 3. 2.
(d) Per 3. 2.

Digitized by Google

PROBLEMA I. PROPOSITIO IV.

A, dato angulo Z A F triangulum abſcindere æquale dato X per lineam ductam dato extra angulum puncto B.

Fig. 53. 54. 55.

COonſtr. Duc B N parallelam F A, lateri Z A producto occurrentem in N. Ab angulo B N Z per punctum B abſcinde triangulum B K N æquale dato X per *prop.* 1. Infinitam N Z ita ſeca in E, ut N K, A E, N E ſint proportionales per *prop.* 2, vel 3. Ducatur B E ſecans A F in G. Erit triangulum E A G æquale dato X.

Demonſtratio. Quoniam N K, A E, N E ſunt proportionales, erit ratio N K ad N E, hoc eſt ratio trianguli N B K ad triangulum N B E, duplicata rationis A E ad N E. Sed etiam ratio (*o*) trianguli A G E ad triangulum idem N B E eſt duplicata ejuſdem rationis A E ad N E, cum ſint propter G A, BN parallelas, ſimilia. Ergo triangula N B K, A G E ad triangulum N B E eandem habent proportionem, ac proinde æqualia ſunt.

(o) *Per* 19. 6.

Corollarium.

Sint proportionales N K, A E, N E, & ſit N B parallela quævis lateri A F, versùs B infinito: ex punctis autem K & E ad quælibet parallelæ puncta R citra ultraque B ducantur Secantes latus anguli in I, I; erit ſemper triangulum E A I par triangulo K N R.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA II. PROPOS. V.

Triangulum C A D per datum extra ipsum punctum B dividere secundùm rationem datam M ad N.

DAtum sit primò punctum B in aliquo, puta in C A, latere producto. Seca adjacens latus AD in puncto L, sic ut segmenta A L, LD sint inter se, ut M ad N; & ab angulo C opposito ducatur CL. Hæc per 1. 6 secabit triangulum in ratione datâ M ad N. Deinde ex dato puncto B per rectam B E ab angulo D per 4 hujus abscinde triangulum G E D æquale triangulo LCD. Manifestum est, rectam B E secare latus AD ante A (adeoque abscissum triangulum G E D totum cadere intra datum triangulum CAD) si enim BE secaret latus A D in A, aut ultra, triangulum abscissum GED majus esset ipso LCD. Recta igitur BGE ex dato puncto B educta secat triangulum CAD in ratione datâ M ad N.

Cum enim GED æquale sit ipsi LCD; hoc verò ad residuum LCA datam habeat rationem, etiam G E D ad residuum G E C A datam rationem obtinebit.

Quod si datum punctum B extra triangulum in nullo existat latere producto, ita construe. Ex puncto dato B ad angulum oppositum C duc rectam, quæ latus oppositum A D secet in O. Si hæc secat latus AD secundùm rationem datam M ad N, secabit quoque per 1. 6 triangulum CAD in ratione datâ. Si non; seca A D in L juxta rationem datam M ad N, atque ad

L ex

L ex opposito angulo C duc rectam CL, quæ per 1. 6 secabit etiam triangulum CAD in ratione datâ. Tum per 4 hujus ab angulo D per rectam BE abscinde triangulum GED æquale ipsi LCD, vel ab angulo A abscinde rectâ B *e* triangulum *ge* A par ipsi *lc* A. Manifestum est rursus, abscissum triangulum totum cadere intra datum triangulum CAD. Recta igitur BGE educta ex dato puncto B secat triangulum CAD in ratione datâ M ad N.

Ex dictis liquet, problema duplicem solutionem admittere.

PARS II.

De sectione trianguli per punctum datum intra triangulum.

LEMMA IV. PROPOS. VI.

Fig. 59. DAta sit recta infinita AZ secta in B, X, F. Accepta quoque sit BO par AX; & sit rectangulum FOB minus rectangulo FBA. Ut habeatur horum rectangulorum æqualitas. Dico, sectionem faciendam ultra F versùs Z.

Demonstr. Fiat enim quælibet sectio ante F, in Q. Quoniam XA major quàm BA, etiam OB, quia par ipsi XA, major erit. Unde factum ex FQ, OB majus est facto ex FQ, BA. Sed FOB est (*a*) minùs quàm FBA: quare si à minori FOB, auferas majus FQ, OB, & à majori FBA auferas minus FQ, BA, remanet QOB jam à fortiori minus quàm QBA. Ergo non habebitur rectangulorum æqualitas, si fiat

(a) Per hyp.

sectio

Digitized by Google

ſectio ante F. Ergo poſt F, ut in Z, ſic enim poterit ZOB æquari ZBA.

LEMMA V. PROPOS. VII.

Data ſit recta infinita AK ſecta in N,& M, ſic ut MN ſit quadrupla AN. Accepta ſit NC par AN. Patet CN, CA, MN fore proportionales. Accipiatur in MN quodvis punctum X diverſum AC. Dico ipſarum XN, XA tertiam proportionalem majorem eſſe quàm MN.

DEmonſtr. Fac NO parem AX, & biſeca MN in S. Ex datis patet, SN eſſe duplam NA, unde quad. SN (ſive rectangulum MSN) duplum eſt rectanguli SNA; ac proinde æquale rectangulo MNA. Deinde, quia ex conſt. XA eſt inæqualis CA, hoc eſt SN; etiam ON par ipſi XA inæqualis eſt SN. Ergo MN in O ſecta eſt inæqualiter. Ergo ex 5. 2 rectangulum MON minus eſt rectangulo MSN, ſeu quadrato SN; hoc eſt (ut jam oſtendi) rectangulo MNA.

Fiat jam, ut XN ad XA, ſic XA ad tertiam NK, ubicumque demum cadat punctum K. Quia ON par eſt (*a*) XA, erit XN ad XA, ut ON ad KN. Igitur convertendo AN ad AX, ut KO ad KN: & ſi pro AX ſubſtituas ei parem ON; erunt proportionales AN, ON, KO, KN. Ergo factum ex AN, KN, ſive KNA, (*b*) æquatur facto ex ON, KO, ſeu KON. Cum igitur antè oſtenſum ſit, MON eſſe minus quàm MNA, patet ex *lem. præced.*, ſectionem K cadere ultra M, ac proinde NK ipſis

KN,

KN, XA tertiam proportionalem majorem esse quàm MN. *Q. E. D.*

PROBLEMA III. PROPOS. VIII.

Fig. 61. 62. A dato angulo SAG per datum intra ipsum punctum B triangulum minimum abscindere.

C*onstr.* Per datum punctum B duc alterutri lateri parallelam BN, NA pone ex N in C. Per C,& B recta transiens abscindet triangulum minimum CAD.

Demonstratio. Abscindatur suprà, vel infrà C quodvis aliud XAP. Ostendam, hoc esse majus. Accipe NM quadruplam NA. Patet CN, CA, MN fore proportionales. Fiat deinde rectis XN, XA tertia prop.; hæc erit major quàm NM per prop. 7. Quare posita ex N versus M finietur ultra M in G. Ergo si ducantur BM, BG, erit triang. GNB majus quàm MNB. Quoniam verò CN, CA, MN sunt proportionales, erit ratio CN ad MN (hoc est 1. 6 ratio trianguli CBN ad triang. MBN) duplicata rationis CN ad CA. Sed etiam ratio trianguli ejusdem CBN ad triang. CDA est duplicata (*a*) rationis CN ad CA. Ergo triangulum CBN ad triangula MBN,& CDA eamdem habet rationem, quæ proinde æqualia sunt. Eodem discursu æqualia ostendemus triangula XAP, GNB. Quare cum GNB sit majus quàm MNB, etiam XAP. majus erit quàm CAD. Minimum igitur est CAD. Quod erat propositum.

(a) *Per* 19. 6.

Co-

Corollarium 1.

Triangulum minimum à dato angulo A per punctum datum B resecabile æquatur triangulo, cujus altitudo est distantia puncti B à latere AG, basis verò quadrupla rectæ NA, quam abscindit ex latere AG linea BN alteri lateri AS parallela.

Corollarium 2.

Si à puncto C ducantur quotcumque rectæ secantes parallelam infinitam NL in punctis O, abscindentur infinita triangula minima eorum, quæ per singula puncta O abscindi possunt.

Corollarium 3.

Ex demonstratis patet, ut triangulum MNB sit par minimo, MN debere esse quadruplam NA; ut verò majus sit minimo, quemadmodum GNB, oportere, ut GN sit major quadruplâ NA.

LEM-

LEMMA VI. PROPOSITIO IX.

Datam rectam AK finitam semel sectam in N ita denuò secare inter N, & K in E, ut NK, AE, NE sint proportionales.

Fig. 63. Constr. Inter KN, NA inveni mediam proportionalem NF, ut traditur p. 13. 6, descripto nimirùm circa AK semicirculo, & ex N erectâ perpendiculari usque ad peripheriam in F. Deinde circa K N alium forma semicirculum, & ex F duc parallelàm ad AK occurrentem semicirculo in puncto H, ex quo dimitte perpendicularem HQ. Rectam NQ pone ex A in *e*, rectam verò KQ ex A in E, erunt tam NA, A*e*, N*e*, quàm NA, AE, NE proportionales; ac proinde duplex habetur solutio, cum parallela per F secat semicirculum KHN. Quod si tangeret, haberetur solùm unica: si ne tangeret quidem, nulla.

Oportet igitur, ut NF media prop. inter KN, AN sit non major semisse ipsius NK.

Demonstratio. Quoniam HF, id est QN, est major quàm AN, patet QN, si ponatur ex A, cadere ultra N, puta in *e*, eritque Q*e* par AN. Et quia rectangula KQN, KNA æquantur quadratis QH, NF æqualibus, erunt æqualia. Unde addito communi quadrato QN, erit rectangulum KNQ æquale rectangulo KNA cum quadrato QN, sive A*e*. Ablatis igitur utrimque æqualibus, nimirùm rectangulo KN, Q*e*, & KNA (cum enim Q*e*, & NA sint æquales, etiam rectangula KN, Q*e*, & KNA æqualia

lia sunt) remanet rectangulum *K* N*e* æquale quadrato A*e*. Sunt igitur proportionales(*i*)N*K*, A*e*, N*e*.

Quod etiam N*K*, AE, NE proportionales sint, sic ostendo. Quoniam rectangula NQ*K*, ANK æqualia sunt, si addatur commune quadratum KQ, erit rectang. NKQ æquale rectangulo ANK *cum* quadrato KQ, sive AE. Sed rectang. NKQ est rectang. sub KN, AE. Ergo rectang. sub KN, AE æquatur ipsi ANK cum quadr. AE. Ergo, si dematur utrimque rectang. ANK, seu KNA, remanet rectang. sub KN, NE æquale quadrato AE. Sunt ergo proportionales NK, AE, NE.

Corollarium.

Ex determinatione jam allatâ ulterior alia colligitur, nimirùm quod AN debeat esse non major quartâ parte ipsius NK. Nam NF media inter NK, NA debet esse non major quàm dimidia N*K*, quæ erat determinatio prima.

PROBLEMA IV. PROPOS. X.

A Dato angulo ZAG per datum punctum B intra eum triangulum abscindere æquale dato. Fi

C*Onstr*. Ex dato puncto B duc BN alterutri lateri parallelam, & ab angulo B N Z per punctum B in ejus latere datum abscinde triangulum B N K par dato per *prop.* 1.

Si jam K N est quadrupla N A, fac N E parem N A, & per E, ac B duc rectam EG,

hæc

hæc abſcindet triang. E A G par triangulo K N B, hoc eſt dato, & minimum omnium, quæ per B abſcindi poſſunt, quæ omnia patent ex *prop.* 8.

Si K N eſt minor quadruplâ N A, problema eſt impoſſ. tunc enim triang. *K* N B (hoc eſt datum) eſt minus minimo eorum, quæ per B reſecari poſſunt, ut patet ex *prop.* 8 ejuſque 3. *Corollario*. Hæ determinationes etiam patent ex præcedenti, ejuſque corollario.

Fig. 65. Quod ſi K N eſt major quadruplâ N A, (a) *Per præc.* finitam rectam A *K*, jam ſectam in N ita denuò ſeca (*a*) in E, ut N K, A E, N E ſint proportionales. Quæ ſectio quando in duobus punctis, (b) *Ibid.* (*b*) fieri poteſt, nempè in E, & *e*, ab utroque puncto per B ducta recta abſcindet triangula æqualia dato. Unde geminam problema ſolutionem admittit. Quod ſi unica ſolùm haberi poteſt ſectio E, una ſolùm dabitur ſolutio problematis. Cæterùm, quando duæ haberi poſſint ſectiones E, quando una tantùm, determinatum eſt in præcedenti.

Demonſt. Quoniam E N, E A, N K ſunt proportionales, erit ratio E N ad N *K* (id eſt (c) *Per* 1. 6. (*c*) ratio trianguli E B N ad triang. K BN) duplicata rationis E N ad E A. Sed etiam ratio trianguli ejuſd. E B N ad triangulum E G A (d) *Per* 19. 6. duplicata (*d*) eſt rationis ejuſdem E N ad E A. Ergo triang. E B N ad K B N, & E G A eamdem habet rationem. Ergo E G A æquale eſt ipſi K B N, id eſt dato. Quod erat propoſitum.

Co-

Digitized by Google

Corollarium.

Sint proportionales E N, AE, K N, & quævis parallela lateri anguli sit N B versùs B infinita, in qua sumatur quodcumque punctum I ultra citraque B: si ex puncto E per punctum I, ducatur recta occurrens lateri in X, erit semper triangulum E X A æquale triangulo K I N.

THEOREMA I. PROPOSITIO II.

Esto triangulum A B C, & punctum intra ipsum quodlibet K: pars minima, quæ à triangulo dato per punctum K datum abscindi potest non trapezium, sed triangulum est.

DEmonstratio. Si negas, pars minima non esto triangulum, sed trapezium C E D B. Ducantur D C, E B. Quoniam igitur C E D B pars minima est per K resecabilis, erit etiam minor quàm E A D, adeoque adhuc minor quàm D C A. Ergo B C D est multò minus quàm D C A. Ergo (a) B D est minor quàm D A. Pari modo quia C E D B pars minima ponitur, erit rursum minor quàm E D A, adeoque adhuc minor quàm E B A. Ergo C B E multò minus est quàm E B A. Ergo C E quoque minor quàm E A. Jam quoniam ipsarum D K, K E alterutra est non minor alterâ, ponamus D K esse non minorem K E. Ex D duc D F parallelam A C, & ex F per K rectam F K G occurrentem lateri in G. Quoniam D K est non minor quàm K E,

R etiam

etiam D F erit non minor quàm G E ob similitudinem triangulorum D F K, E K G. Et quia jam ostendi, B D esse minorem quàm D A, ac proinde minorem dimidiâ B A; etiam D F erit minor quàm dimidia A C (est enim (b) ut B D ad B A, ita D F ad A C). Atqui ostensum est, D F esse non minorem quàm GE. Ergo GE minor etiam est, quàm dimidia A C. Ostendi autem etiam, C E esse minorem quàm E A, adeoque minorem dimidiâ A C. Ergo tota G C est minor quàm AC. Ergo recta per F, & K ducta occurrit lateri C A inter C, & A, ac proinde à triangulo toto abscindit triangulum, nempè F C G. Deinde quoniam triangula similia sunt D K F, EKG estque DK non minor quàm K E, patet (c), D K F esse non minus quàm E K G, ac proinde addito communi F K E C, trapezium DECF esse non minus triangulo GFC. Liquet ergo, trapez. totum BDEC esse majus triangulo FGC. Ergo trapezium BDEC non est pars minima, quæ per punctum K abscindi potest. Pars igitur minima triangulum erit.

(b) Per 4. 6.

(c) Ex 19. 6.

Corollarium.

Pars maxima à dato triangulo resecabilis per datum punctum K sæpè trapezium est; quotiescumque nimirùm linea D E minimum triangulum abscindens nullum angulum secat.

Scholium.

Hic discursus exemplum rursus clarissimum præbet ejus ratiocinationis, quæ ex contradi-

ctorio

ctorio assertionis directâ, ac ostensivâ demonstratione assertionem ipsam concludit. Similem dedi etiam prop. 4. lib. 5. Cylind., & Annul. *& alibi. Quæ ratiocinandi forma, quando nonnullis ita mirabilis visa est, ut eam crederent cum ratione pugnare, quàm sit rationi consentanea non erit alienum obiter hìc declarare. Proprium est propositioni falsæ, ut ex ea deduci possint contradictoria; quæ proinde in ipsâ mediatè, seu virtualiter continentur. Jam, licèt plerumque contradictoria illa sint ab ipsâ falsâ propositione distincta utraque, contingit tamen subinde, ut eorum alterum sit ipsa propositio falsa, alterum propositionis falsæ negatio. Quod quando evenit, tum enimverò potest ex ipso falso ejus negatio elici, hoc est verum: nam falsi negatio verum est. Atque id quidem falsi naturæ est planè consentaneum. Neque enim jam magis mirum erit, ex falso elici posse verum, quàm in falso contineri contradictoria, quorum alterum sit falsum ipsum, alterum negatio ejusdem falsi.*

LEMMA VII. PROPOS. XII.

Datum sit triangulum ABC, & punctum E intra illud, per quod ductæ sint singulis lateribus parallelæ DF, KI, GH. *Fig. 67. 68*

Si unum lateris alicujus segmentum DB (ut in *Fig.* 67.) inter parallelam unam DF, & latus aliud B C interjectum, sit majus reliquo DA: dico, duo semper minima triangula, quæ ab angulis B, & C lateri BC adjacentibus resecari possunt, extra triangulum cadere; tertium intra.

Si verò omnia laterum segmenta (ut in *Fig.* 68.) inter parallelas, & latera interjecta sint non majora segmentis residuis (nimirum si DB, FC reliquis DA, FA; & BI, AK reliquis IC, KC; & AG, CH reliquis GB, HB sint non majores:) Dico, tria minima triangula, quæ à tribus trianguli angulis resecari possunt, intra triangulum cadere.

Fig. 67. *Demonst.* 1. *Pars*. Quoniam DB major est ex hyp. quàm DA, ergo si ipsi fiat æqualis, ut DN, ea cadet extra triangulum, ac proinde ductâ per N, & E rectâ NM, etiam triangulum NBM extra triangulum ABC terminabitur. Est verò, per 8 *prop.* NBM minimum per E ab angulo B resecabile. *Pari ratione*, quia CF est major quàm FA, (est enim ut BD, ad DA, sic CF ad FA) ipsi æqualis, nempè FL cadet ultra A. Quare ductâ LEO, triangulum LOC extra datum ABC cadet. Est autem rursus LCO

(a) *Per* 8. *bujus*. minimum ab (*a*) angulo C resecabile. *Demum* quia AD ponitur minor quàm DB, erit AG adhuc minor quàm GB. Quare ipsi par GP terminatur ante B. Pari modo quia AF est minor quàm FC, etiam AK est minor quàm KC, adeoque ipsi par KS terminatur ante C. Ductâ igitur lineâ PES, quam ex 8 *bujus* patet esse rectam, abscindetur triangulum intra datum cadens PAS, quod per *prop.* 8 est minimum ab angulo A per E resecabile.

Fig. 68. *Demonstr.* 2. *Pars*. Quoniam ex hyp. IB non major est quàm IC, & BD quàm DA, ipsis æquales I *r*, & D *o* cadent non ultra C, & A. Ergo ductâ rectâ *o* E *r*, triangulum *o* B *r* ab

(b) *Per* 8. *bujus*. angulo B resectum erit (*b*) minimum, & terminatum intra datum ABC. Similiter quia AK,

A G

Digitized by Google

AG ex hyp. sunt non majores quàm KC, GB, ipsis æquales K*m*, G*n* terminantur non ultra C, & B. Ergo ut priùs &c. Demùm quia ex hyp. CF, CH sunt non majores quàm FA, HB, ipsis pares F*x*, H*t* terminantur non ultra A, & B. Ergo ut prius &c.

Corollaria.

1. Vel duorum angulorum minima triangula cadunt extra datum triangulum, vel nullius: nunquam unius tantùm, patet ex 1 parte.

2. Vel unius anguli minimum triangulum cadit intra datum triangulum, vel trium; nunquam duorum tantùm: si enim duorum tantùm caderent intra, ergo unius tantùm anguli caderet extra: quod repugnat primo.

3. Nunquam omnium angulorum minima triangula cadunt extra triangulum datum, patet ex 1 parte prop.

PROBLEMA V. PROPOS. XIII.

A dato triangulo ABC per datum intra illud punctum E minimam partem abscindere. Fig

QUoniam minima pars à triangulo ABC resecabilis non (*a*) est trapezium, sed triangulum ab aliquo trium angulorum, A, B, C abscissum, & totum intra datum triangulum cadens, necesse est, illud sit unum ex tribus minimis, quæ à tribus angulis abscindi possunt, sic ut cadant intra datum ABC. Eorum autem vel unum tantùm, vel omnia tria intra triangulum

(a) 11.

Digitized by Google

ABC cadere, patet ex *Coroll.2.præced.* Si unum tantùm intra cadit, illud erit minimum, quod à triangulo ABC per E abſcindi poteſt. Si tria: quod ex tribus erit minimum quæſito ſatisfaciet.

Conſtr. 1. Ducantur igitur per E punctum datum ſingulis lateribus parallelæ D F, K I, GH. Si alicujus lateris ſegmentum, ut B D inter unam parallelam DF, & latus aliud BC interjectum ſit majus reſiduo DA, accipe GN parem GA: per N, & E duc NX: hæc à triangulo A B C abſcindet triangulum minimum NAF per datum punctum E.

Demonſtr. Quoniam BD inter latus B C, & ipſi parallelam DF intercepta major eſt reliquâ DA, triangula minima ab angulis B, & C reſecabilia per E cadent extra triangulum ABC, ſolius autem A anguli minimum per E reſecabile cadet intra per 1 *part. præced.* Sed pars minima à triangulo A B C reſecabilis per E neceſſariò eſt triangulum per *prop.* 11, & quidem unum ex tribus minimis, quæ ab angulis A, B, C abſcindi poſſunt, ut patet. Ergo minima pars à triangulo A B C per E reſecabilis eſt minimum triangulum per E reſecabile ab angulo E. Atqui N A X per *prop.* 8 minimum reſecabile ab angulo A per E, cum G E ſit parallela lateri A C, & G N par GA.

Fig. 70. Ergo &c.

Conſtr. 2. Si ductis per E punctum datum ad latera parallelis tribus D F, K I, G H, omnia ſegmenta inter latera, & lateribus parallela intercepta ſuis reſiduis ſint non majora, nimirùm D B, F C non majora ſint reſiduis DA, F A, & A K, B I reſiduis K C, I C,

& A G,

Digitized by Google

& A G, C H, residuis G B, H B: fiat ut C H ad B I, ita C F ad Z. Vide quæ ex tribus rectis A K, C F, Z, fit minima: (A K pertinet ad angulum A; C F ad angulum C; Z ad angulum B) cujus anguli linea est minima, ab eo angulo abscinde per E minimum triangulum per *prop.* 8. Erit hoc minima pars à triangulo A B C per E resecabilis. *In casu* quia Z est minima, fac D O parem D B: per O, & E duc rectam O E X, hæc solvit Problema. Poterunt hæ tres rectæ omnes esse pares, ac proinde tria esse minima æqualia; subinde duæ pares erunt, & minores tertiâ, ac proinde minima duo. Vide *prop. sequentes*.

Demonstratio. Ex dato puncto E duc perpendiculares E Q, E P: per *coroll.* 1 *prop.* 8 triangulum minimum per E ab angulo A resecabile, est æquale triangulo, cujus altitudo E Q, basis quadrnpla A K. Similiter minimum anguli C æquatur triangulo, cujus altitudo E Q basis quadrupla C F. Sed hæc triangula sunt, ut bases, nimirum ut quadruplæ rectarum A K, C F; hoc est, ut ipsæ A K, C F. Ergo minimum anguli A est ad minimum anguli C, ut A K ad C F.

Pari modo triangula minima angulorum C, & B per E resecabilia æquantur per idem *coroll.* triangulis, quorum altitudo E P, bases verò quadruplæ rectarum C H, B I; ac proinde sunt inter se, ut quaprnplæ CH, BI, hoc est, ut ipsæ C H, B I. Ergo & minimum anguli C est ad minimum anguli B, ut C H ad B I; hoc est per const., ut C F ad Z. Igitur ex æquo minimum anguli A est ad mini-

nimum anguli B, ut A K ad Z. Ergo minima angulorum A, C, B per E resecabilia sunt rectis A K, C F, Z ordine proportionalia. Ergo inter hæc tria minima illud erit minus, cujus recta erit minor. Quare cum hic Z sit minor quàm A K aut C F; minimum anguli B erit minus minimo anguli A, & minimo anguli C. Ergo triangulum minimum anguli B, per E nimirùm resecabile, est absolutè minimum triangulum, quod à dato A B C triangulo per E abscindi potest, ac proinde per *prop.* 11, etiam pars minima. Minimum autem ab angulo B resecabile per E est triangulum O B X per 8, est enim E D parallela lateri C B, & D O par D B. Ergo &c.

THEOREMA II.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 71. Reperitur punctum intra quodvis triangulum, per quod à triangulo abscindi possint tres partes minimæ, seu triangula tria minima inter se æqualia. Punctum verò illud est ipsum trianguli gravitatis centrum.

DEmonstratio. In triangulo A B C ab angulo quovis B ducta sit B L bisecans latus A C in L, ejusque pars tertia sit L E. Erit E (*a*) centrum grav trianguli. Per E ducantur lateribus parallelæ G H, K I, D F; hæ omnia trianguli latera trisecabunt, eruntque triangula tria G B H, K C I, D A F inter se æqua-

(a) *Archim.*

æqualia, & minima, quæ à dato triangulo per E abſcindi poſſunt. Quæ omnia ſic oſtendo. Quia A L par eſt L C, erit (*c*) & G E par E H; ac proinde A K par erit F C. Jam quia L B ſeſquialtera eſt E B, etiam A C ſeſquialtera (*d*) erit G H, ac proinde tripla E H; hoc eſt A C tripla eſt A K, ſeu F C. Unde patet, etiam K F eſſe tertiam partem A C; ideoque A C triſecta eſt in K, & F. Deinde quia L E eſt tertia pars L B, erit etiam I H tertia pars G B. Rurſum quia K I eſt parallela A B, eſtque A K tertia pars AC, etiam B I eſt una tertia B C. Cum ergo etiam C H ſit una tertia B C, patet quoque I H eſſe unam tertiam B C. Igitur B C triſecta eſt in I, & H. Eodem modo oſtendam, A B triſectam eſſe in G, & D.

Quod triangula illa tria ſint æqualia ſic patet: ratio totius A B C ad G B H, duplicata eſt per 19. 6 rationis B A ad G B, hoc eſt rationis ſeſquialteræ. Rurſum ratio totius ad K C I eſt duplicata rationis A C ad K C, hoc eſt rationis ſeſquialteræ. Et rurſum ratio totius ad D A F eſt duplicata rationis B A ad D A, hoc eſt iterum ſeſquialteræ. Ergo totum ad ſingula illa tria eandem habet rationem, ac proinde tria illa inter ſe æqualia ſunt.

Singula demùm eſſe minima ſic oſtendo. Jam oſtenſum eſt, H I eſſe parem B I, & E I eſt parallela lateri B A. Ergo per 8 G B H eſt minimum triangulum, quod ab angulo B abſcindi poteſt per E. Similiter quia F K par eſt F C, & E F parallela lateri B C, per 8 erit K C I minimum ab angulo C reſecabile per E. Demùm quia K F eſt par K A,

eſtque

estque E K parallela lateri B A, rursus per 8 erit D A F minimum ab angulo A resecabile per E. Quare cum GBH, KC I, D A F sint minima per E resecabilia ab angulis B, C, A, & inter se paria sint; erunt quoque tria minima quæ à triangulo ipso A B C abscindi possunt per E.

Corollarium.

D F bisecatur in E. Nam E F æquatur H C, hoc est B I, hoc est D E.

THEOREMA III.

PROPOSITIO XV.

Fig. 72. In triangulo quovis ABC recta BL bisecet AC, ejusque pars tertia sit LE. Sumatur inter L, & E quodvis punctum Z.

Dico per hoc abscindi posse à triangulo toto ABC duo triangula minima inter se æqualia.

DEmonstr. Ducantur lateribus parallelæ, per Z quidem TV, MQ, DN, per E autem GH, KI. Quoniam ex præc. patet, BC trisecari in I, & H, ac proinde BI, CH æquari, patet, BQ majorem esse quàm CV. Quare si fiat ut CV ad BQ, ita CN ad α, erit α major quàm CN. Jam quia TZ est ad ZV, ut AL ad LC, erit TZ æqualis ZV, ideoque & AM ipsi CN æqualis. Patet autem ex *prop.* 12, minima

ma triangula ab angulis A, C, B resecabilia per Z cadere intra triang. ABC: & ex 13 habemus, ea esse inter se ut rectas AM, CN, α; sic ut AM respondeat minimo anguli A, CN minimo anguli C, α minimo anguli B. Ergo cum ostenderim æquales esse AM, CN, & α majorem quàm CN, adeoque & quàm AM, erunt minima angulorum A, & C inter se æqualia, & minora singula minimo anguli B: ac proinde erunt duo æqualia minima omnium, quæ per Z ab triangulo toto ABC abscindi possunt.

Quod si punctum Z detur suprà E centrum gravitatis, non poterunt abscindi duo minima æqualia, licèt omnium angulorum minima triangula caderent intra ABC. Fig. 73.

Nam tunc CV erit major quàm BQ, adeoque si fiat ut CV ad BQ, ita CN ad α; erit α minus quàm CN, & quàm AM, ac proinde minimum anguli B erit minus quàm minima angulorum A, & C. Ex quo patet determinatio.

Corollarium ad duas præced.

In omni triangulo rectæ per gravitatis centrum E lateribus parallelæ GH, KI, DF abscindunt tres partes æquales maximas AGHC, AKIB, BDFC. Patet ex *prop.* 14. Fig. 71.

In datis verò *prop.* 15. per quodvis Z punctum inter E, & L abscindi possunt duæ partes æquales maximæ. Fig 72.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XVI.

Triangulum per datum in ipso punctum dividere secundùm rationem datam.

DAtum sit triangulum BAC, & punctum E, intra illud; data quoque sit ratio quæcumque α ad β.

Constructio 1.

Fig. 74. Ex quovis angulo B ducatur BD Secans latus AC, adeoque etiam per 1.6 triangulum BAC, secundùm rationem datam α ad β. Deinde per datum punctum E abscinde à triangulo BAC minimam partem FAQ per 13 *hujus*. Si triangulum BAD, quod altero BCD minus est, est minus minimo FAQ, impossibile erit Problema. Scietur autem utrum minus sit, si amborum ratio ad rectas lineas (*a*) revocetur.

(a) *Per cor.* 3. *p.* 23 6.

Constructio 2.

Fig. 74. Si ratio data α ad β existat intra limites determinationis jam datæ, dividatur ut prius, triangulum BAC rectâ BD secundùm rationem datam. Tum à singulis angulis A, B, C per datum punctum E abscinde (*a*) duo triangula æqualia ipsi BAD, vel unum, si duo nequeant. Quando autem possint abscindi duo, quando unum, vide *prop.* 10, & 9. Item à singulis angulis per E abscinde (*b*) triangula duo, vel unum,

(a) *Per* 10. *hujus*.

(b) *Per* *ean*.

Digitized by Google

unum, æqualia alteri BDC. Quot ex his triangulis cadent intra triangulum datum BAC, tot habebimus Problematis solutiones.

Constructio 3.

Si ratio data fuerit ipsa ratio partis maximæ ad minimam, quæ à dato BAC triangulo abscindi potest per E, & punctum E fuerit ipsum centrum gravitatis; per ipsum ducantur singulis lateribus parallelæ. Dico, quamlibet harum solvere Problema, ut patet ex *prop.* 14, ac proinde triplicem hoc casu haberi solutionem.

Constructio 4.

Si ratio data fuerit ipsa ratio partis maximæ ad minimam, & punctum datum E sit infrà gravitatis centrum O in rectâ AZ bisecante aliquod latus BC, duplex habebitur solutio, si nimirum per 8 *hujus* ab B, & C abscindantur duo minima triangula BXT, CVQ per punctum E. Ea enim per 15 erunt æqualia, & minima quæ à triangulo BAC abscindi possunt.

Constructio 5.

Si ratio data α ad β fuerit majoris inæqualitatis, & minor ratione partis maximæ ad minimam, & punctum datum E sit ipsum gravitatis centrum, sextuplicem Problema solutionem poterit admittere hunc in modum.

Fiat ut α ad β, ita CF ad FA, & ducatur BF. AB angulo A per E abscinde per 10 *hujus* duo

duo triangula DAI, NAK ipsi BAF, quod altero BFC minus est, æqualia. Ea abscindi posse, & terminari intra triangulum BAC, ostendam infrà. Dico, tam BDIC ad DAI, quàm CBKN ad NAK esse, ut α ad β. Eadem operatio si fiat circa angulos B, & C (fieri autem posse ostendam infrà) universim sextuplex obtinebitur solutio Problematis.

Quando autem, juxta determinationem in *prop.* 10, vel potiùs 9 demonstratam, ab angulo aliquo tantùm unum abscindi poterit triangulum æquale ipsi BAF, pauciores erunt solutiones Problematis: semper tamen tres saltem solutiones poterunt obtineri.

Demonst. Abscindi posse triangula duo ipsi BAF æqualia sic ostendo. Cum ratio α ad β, hoc est ex const. ratio CF ad FA, hoc est ratio (a) trianguli BFC ad BAF sit (b) minor ratione partis maximæ ad minimam, patet, BFC esse minus maximâ parte, & BAF majus minimâ. Ergo per 10 *hujus* abscindi possunt duo triangula, puta DAI, & NAK æqualia ipsi BAF.

(a) *Per* 1.
(b) *hyp.*

Utrumque verò terminari intra BAC sic demonstro. Per E, quod est gravitatis centrum trianguli BAC, duc QL parallelam ad BC. Ostensum est in 14 *hujus*, QAL esse minimum triangulum, quod ab angulo A abscindi per E potest. Deinde cum ratio α ad β, hoc est ratio CF ad FA sit ratio (d) majoris inæqualitatis, cujus major terminus sit CF, patet, CBF (o) esse majus quàm FBA; ac proinde FBA esse minus semisse trianguli BAC. Quod si ex B per E ducatur recta BX, ea (c) bisecabit AC, cum punctum E sit idem cum centro gravitatis. Ergo

(d) *hyp.*
(o) *Per* 1. 6.
(c) *ostendi* 12. *hujus*.

trian-

triangulum XBA ex B per E abſciſſum erit ſemiſſis ipſius BAC, adeoque majus quàm FBA. Ergo triangulum DAI, quod ab angulo A per E abſcindetur æquale ipſi FBA, etiam minus erit quàm XBA, ac proinde erit vicinius minimo QAL, adeoque neceſſe eſt, ut terminetur intra triangulum BAC. Eodem modo probabitur, alterum NAK ipſi FBA æquale, totum cadere intra BAC.

Jam verò cum DAI, & NAK ſint paria ſingula ipſi FBA, etiam reſidua BDIC, CBKN reſiduo FBC ſingula erunt æqualia: ac proinde triangulum BAC rectis DI, NK bis ſectum eſt per E in ratione datâ.

Denique quia eodem planè diſcurſu demonſtrabitur, à reliquis angulis ſingulis B,& C poſſe per E abſcindi duo triangula æqualia ipſi FBA, & terminata intra BAC; manifeſtum in hoc caſu eſt, ſex obtineri poſſe ſolutiones Problematis. *Q. E. D.*

CAPUT XV.

Cujuſcumque rectilinei ſectio per punctum datum.

SEctione trianguli ex dato puncto ad rationem datam adæquatè (niſi fallor) jam conſtitutâ, deſiderabunt, opinor, Geometriæ ſtudioſi ſimilem cujuslibet dati rectilinei ſectionem. Quæ quando ex trianguli ſectione ferè pendet, eam priori tractatui hìc adjungam, demonſtrationibus, quæ conſtructione inventâ ſatis ſunt faciles, aut tantùm indicatis, aut breviter perſtrictis.

Lem-

Digitized by Google

Lemma.

Rectilineorum datorum rationes rectis lineis exprimere: sive datam rectam ita secare, ut segmenta ejus sint datis rectilineis proportionalia.

(a) Per 46. 1. (b) Per 10. 6.

Reducantur (a) rectilinea data ad rectangula æquè alta: tum ita seca rectam (b) datam, ut ejus segmenta proportionalia sint basibus rectangulorum. Dico Factum. Demonstratio patet ex. 1. 6.

PROBLEMA I.

Fig. 78.

Datam figuram rectilineam B F E D C ex puncto A in circumferentia dato secare secundùm rationem datam MO ad ON.

Const. Ex puncto dato A ductis ad omnes figuræ angulos rectis lineis resolvatur figura data in triangula H, I, K, L.

(a) Per lem.

Tum ita seca (a) rectam MN in punctis P, Q, R, ut ejus segmenta sint triangulis H, I, K, L ordine proportionalia.

Si aliqua sectio incidat in punctum O, solutum est Problema.

Quod si nulla sectionum coincidat cum puncto O, vide segmentum Q R, in quo erit punctum O, cui triangulo respondeat. Hic respondet triangulo K; hujus basim E D seca in G recta A G, ut sit E G ad G D

(b) Per 1. 6.

(adeòque (b) & triang. E A G ad triang. GAD)

Digitized by Google

GAD) ut QO ad OR. Dico ABFEG esse ad AGDC, ut MO ad ON.

Demonstratio utriusque constructionis est manifesta componendo, dividendo, & ex æquo &c.

PROBLEMA II.

Rectilineum datum BCDEF ex dato puncto A in perimetro secare in quotvis partes, quæ datas inter se habeant rationes.

CONSTR. Rationes datas exprimant rectæ FG, GM, MO, OP. Per *præced.* figuram totam CE ex dato puncto A seca per rectam AK, ut sit R ad reliquum KF, sicut est FG ad GP. Tum per eamdem seca reliquum KF per rectam AN, ut sit S ad reliquum NF, sicut GM ad MP: hoc reliquum rursus seca per rectam AQ, ut T sit ad V, sicut MO ad OP. Dico segmenta R, S, T, V esse rectis FG, GM, MO, OP proportionalia.

Demonstratio est manifesta componendo, & ex æquo &c. Vide demonstrationem *Probl.* 4 *cap.* 16.

PROBLEMA III.

Parallelogrammum BCDE ex dato extra illud puncto A secare in ratione datâ FO ad OP.

CONSTR. 1. Ex A ad duos angulos C, D remotiores ducantur rectæ AC, AD, quæ secent latus angulis oppositum in K, &

Digitized by Google

G, (qui erit caſus primus) dirimentes parallelogrammum datum in duo triangula, & (a) Per lem. unum trapezium. Tum (a) ſeca rectam F P in ſegmenta F M, M N, N P ipſis C B K, C K G D, D G E ordine proportionalia, ſi aliqua ſectionum coincidat cum puncto O, habetur intentum, ut patet. Si nulla coincidat, vide ſegmentum N P, in quo eſt punctum O, cui ſegmento parallelogrammi reſpondeat.

Fig. 80. Si reſpondeat uni ex triangulis, ut D G E, per *p.* 5 *cap.* 14, ſeca triangulum D G E ex A rectâ A Z X, ut D G Z X ſit ad X Z E, ut N O ad O P. Dico totum parallelogrammum rectâ A Z X ſectum eſſe in ratione datâ F O ad O P. Demonſtratur componendo, ex æquo, & dividendo.

Fig. 81. Si ſegmentum, in quo eſt O, reſpondeat trapezio C K Z D; ſeca K G rectâ A Z X, ſic ut K Z ſit ad Z G, ut M O ad O N. Dico factum. Demonſtratio facilis eſt. Nam 1. 6 etiam K A Z erit ad Z A G, ac proinde, & C A X ad X A D, ut M O ad O N. Ergo etiam C K Z X eſt ad X Z G D, ut M O ad O P. Cætera patent componendo, ex æquo, & dividendo &c.

Fig. 82. *Conſtr.* 2. Quod ſi punctum datum A ſit in aliquo latere, ut C B producto; ad oppoſitum angulum D duc rectam A K D. Tum rectam F P ſeca in ſegmenta F M, M P proportionalia ſegmentis C B K D, D K E. Cætera deinde ut ſuprà.

Fig. 83. Si punctum A ſit in diametro D B productâ, biſeca F P in M. Tum ex A rectâ A Z X ita ſeca (b) triangulum D B E, ut D B Z X ſit (b) Per 5. cap. 14. ad X Z E, ut M O ad O P. Dico factum. Demonſtratio patet.

PRO-

PROBLEMA IV.

Datum sit trapezium DCKG habens duo latera coeuntia in A. Oporteat illud ex puncto A dividere in ratione datâ MO ad ON.

SI duo reliqua latera DC, GK sint parallela, ut in *Fig.* 81. fiat ut (·) MO ad ON, ita DX ad XC. Recta AX satisfaciet Problemati, ut jam in demonstratione præcedenti ostensum est.

Si etiam reliqua duo latera concurrant, puta in F, fiat ( ) ut DCKG est ad CFK, ita MN ad NQ. Deinde ex puncto A rectâ AX (*c*) ita seca triangulum DFG, ut sit DXZG ad XFZ, sicut MO est ad OQ. Dico etiam DXZG fore ad XCKZ, ut est MO ad ON.

Demonstr. Quia DXZG per constr. est ad XFZ, ut MO ad OQ; erit quoque DXZG ad DFG, ut MO ad MQ. Et quia per const. est DCKG ad CFK, ut MN ad NQ, etiam erit DFG ad CFK, ut MQ ad NQ. Igitur ex æquo ita ratiocinabimur.

DXZG est ad DFG, ut MO ad MQ, & DFG est ad CFK, ut MQ ad NQ; & CFK est ad DCKG per constr., ut NQ ad MN. Ergo ex æquo DXZG est ad DCKG, ut MO ad MN. Ergo etiam DXZG est ad XCKZ, ut MO ad ON. *Q. E. D.*

Digitized by Google

PROBLEMA V.

Fig. 85.

Rectilineum quodcumque ex dato extra ipsum Puncto A dividere secundùm rationem datam K O ad OP.

Construct. Rectis ex dato puncto A emissis partire figuram datam utcumque in triangula, & quadrangula B, C, D, E. Tum rectam KP seca (*o*) in segmenta KN, NM, MQ, QP planis B, C, D, E ordine proportionalia. Si aliqua sectio coincidat cum O, habetur quæsitum, si nulla, tunc illud segmentum figuræ, quod respondet segmento rectæ KP, in quo est O, ita (*d*) seca, ut ipsum segmentum à puncto O sectum est. Dico factum. Ex. gr. quia segmentum C respondet segmento NM, in quo est O, seca per 4 ipsum C rectâ AZ secundùm rationem NO ad OM; recta AZ secabit totam figuram in ratione KO ad OP.

(o) *Per lem.*

(d) *Per probl. 5. c. 14, vel probl. 4. bujus.*

Demonstratio instituetur componendo, ex æquo, dividendo &c. *vide demonst. Prob.* 4 *cap.* 16.

Corollarium.

Quod si oporteat figuram datam secare in partes quotvis, quæ datas habeant inter se rationes, operare ut in 2. Probl.: *ut enim istbic per* prop. 17, *ita hic per* 21 *quæsitum obtinebitur*.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

Datum parallelogrammum BCDE per punctum intra illud datum A dividere in ratione datâ FO ad OP. *Fig. 86. 87*

Construct. Si Problema possibile est, recta illud solvens aut truncabit aliquem angulum parallelogrammi dati, aut secabit duo latera ejus opposita. Tentetur primùm sectio ad angulum B, & ducatur CE. Seca (*a*) FP in segmenta FM, MP triangulis BCE, DCE proportionalia. Tum ductâ per A rectâ LAI, divide (*b*) triangulum BCE in ratione FO ad OM. Si LAI occurrat lateribus BC, BE inter B, & C, & inter B, ac E, vel in C, aut E, solutum est Problema, & patet demonstratio: si occurrat ultra C, & E, secando nimirùm rectam C E, tentetur eadem sectio circa reliquos angulos. *Fig. 86.* (a) *Per lem.* (b) *Per 16. cap. 14.*

Quod si in angulis sectio quæsita non succedat, tentanda ea erit ad duo latera opposita ex. gr. CD, B E hunc in modum. Seca parallelogrammum BD in ratione datâ FO ad OP per rectam R S parallelam ad CB. Bisecâ deinde RS in Q. Per A, & Q ducta recta secans latera opposita in L, & I solvet Problema. Nam LQS, IQR æqualia erunt: additoque communi CRQLB, erit CILB æquale ipsi BCRS. Ex quo patet quæsitum. Quod si recta per A, & Q non occurrat lateribus CD, BE nisi productis, tentetur eadem sectio ad latera opposita C B, DE. *Fig. 87.*

Digitized by Google

Si verò neque ad angulos ullos, neque ad ulla opposita latera quæsita sectio succedat, Problema impossibile erit.

Porrò ex inspectione rationis datæ, & situ puncti dati facilè discernet Geometra, utrum ad angulos, an ad latera opposita, item ad quem angulum, & ad quæ opposita latera prædicta sectio tentanda sit.

PROBLEMA VII.

Fig. 88.

Trapezium BCDE per datum intra illud punctum A secare in ratione datâ FO ad OP.

TEntetur primùm sectio circa angulos, ut in præcedenti. Quod si ea non succedat, tentetur circa latera opposita hunc in modum.

Vel trapezium nulla habet latera parallela, vel duo. Habeat primò nulla, & sectio tentetur ad latera CD, BE, quæ concurrant in L. Fiat ut (a) BCDE ad DLE, sic FP ad PZ. Tum per (b) punctum A ita seca triangulum CLB, ut BCKX sit ad XLK, sicut FO ad OZ. Dico etiam DCKX fore ad XKDE, ut FO ad OP. Demonstrabitur ut *Probl.* 4. Quod si talis sectio trianguli CLB juxta determinationes *Probl.* 16. *cap.* 14. impossibilis sit, aut recta secans XK secet latus ED, tunc latera CB, DE producantur, donec concurrant, & circa novum inde natum triangulum simili modo dicta sectio iteretur. Quæ si etiam isthic successu careat, Problema erit impossibile.

(a) *Per lem.*
(b) *Per* 16. *cap.* 14.

Habeat deinde trapezium duo latera parallela.

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Fig. 92.

Triangulum BAC per rectam datæ rectæ A G parallelam secundùm datam rationem MO ad OQ dividere.

AB angulo C ducatur ad oppositum latus recta C D parallela datæ A G. Si est BD ad DA, ut MO ad O Q, erit quoque per 1. 6. BCD ad D C A, ut M O ad O Q, adeoque recta CD Problemati satisfaciet. Si verò non est, fiat (a) ut BD ad DA, sic M N ad NQ. Deinde triangulum D A C per rectam F E parallelam datæ ita (b) seca, ut sit DFEC ad FAE, sicut NO ad NQ. Dico etiam B F E C fore ad FAE, ut M O ad O Q; adeoque rectam E F quæsito satisfacere.

(a) *Per* 10 6.
(b) *Per præc.*

Demonstratio instituetur componendo; ex æquo; dividendo.

PROBLEMA III.

Fig. 93.

Trapezium B A G D bina habeat parallela latera BA, D G: reliqua BD, A G coeant in E. Oporteat ipsum rectâ CF lateribus parallelis parallelâ secare in ratione data PO ad OR.

FIat P R ad R S (a), ut B A G D ad G E D. Deinde triangulum B A E rectâ C F lateri A B parallelâ ita seca, (c) ut B A F C sit ad CFE, sicut PO ad OS. Dico etiam B A F C

(a) *Per lem. ante prob. 10 15*
(c) *Per prob. 1.*

fore

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER TERTIUS.
DE CORPORE.



Orporum mensura est cubus ali- 1
cujus notæ mensuræ linearis, ut pollicis, palmi, pedis &c. Recta AB repræsentet longitudinem unius pedis, suprà quam descriptum sit quadratum, sive pes quadratus ABC. Cubus AOCB suprà hoc quadratum descriptus est cubus unius pedis, sive pes cubicus, cujus nimirùm & longitudo AB, & latitudo BC, & altitudo BO unius omnes sunt pedis. Atque idem de aliis mensuris intellige. Porrò cubi, ac cæterorum corporum definitiones vide ante librum 11., ac 12 elem. Geometriæ.

Digitized by Google

(e) Per 8. partem prob. 18. c. 18.

producitur ex triangulo BAE ducto (e) in peripheriam centri gravitatis Q. Ergo coni BACD soliditas nota est. *Q. E. D.*

PROBLEMA V.

Curvam coni recti superficiem metiri.

Fig. 15.

OMnis coni recti curva superficies producitur ex circumferentiâ basis ductâ in semissem lateris coni.

Metire Agitur aliquo genere mensuræ coni latus AB, & basis diametrum BC; ex qua eodem genere mensuræ inveni circumferentiam (a) BDCO. Ea in lateris BA semissem ducta dabit quadrata ejusdem mensuræ, quibus conica superficies æqualis est.

(a) Per probl. 4. c. 12.

Exemplum. Ex notâ per mensuram basis diametro BC reperta sit circumferentia BCDO 150 pedum. Latus verò AB inventum sit pedum 12. Circumferentia 150 ducta in semissem lateris 6 efficit pedes quadratos 900, quibus æquatur data superficies conica.

Demonstratio. Curva superficies coni recti est æqualis triangulo, (b) cujus basis est circumferentia basis coni, altitudo autem latus coni. Atqui hoc triangulum producitur (c) ex suâ basi (nempe basis circumferentiâ) in semissem altitudinis (nempè lateris coni). Ergo & coni superficies curva producitur ex circumferentiâ basis in lateris semissem. *Q. E. D.*

(b) Demonstravi in selectis ex Archim p. 13. cor. 1. item Cyl. & annul. l. 2. p. 2.

(c) Per prob. 4. c. 11.

Superficies cylindricam, & conicam ad circulum reductas, & insignes utriusque proprie-

segmentum E H D F, cujus axis P D notus sit in partibus axis totius AD. Metire totam sphæræ (d) superficiem. Deinde fiat ut axis A D ad segmentum axis P D, ita sphæræ superficies tota ad aliud; erit hoc, ipsum E H D F segmentum quæsitum.

(d) *Præced.*

Eodem modo mensurabitur segmentum superficiei inter duos parallelos circulos BGC, EHF interceptæ.

Quod si segmentum B E F C non existeret inter circulos parallelos, tunc metire, ut jam tradidi, tàm segmentum BDC, quàm segmentum EDF. Majus aufer à minore: residuum dabit segmentum quæsitum.

PROBLEMA X.

Dimensio sphæræ.

OMnis sphæra producitur ex superficie sphæricâ ductâ in sextantem diametri, seu trientem semidiametri.

Exemplum. Per *Problema* 8 reperta sit sphæræ superficies pedum quadratorum $452 \frac{44}{113}$ ex diametro pedum 12, hujus sextans sunt pedes 2, per quos multiplicata superficies $452 \frac{32}{113}$ producit pedes cubicos $904 \frac{88}{113}$ pro soliditate sphæræ datæ.

Demonstratio pendet ex nobilissimo Archimedis theoremate, cujus demonstrationem intellectu perfacilem dedi *prop.* 38 *select. ex Archimede*. Est autem tale: omnis sphæra æqualis est cono, cujus basis par est superficiei sphæræ, altitudo autem radius sphæræ. Ex *hoc igitur theoremate, & Problemate* 4 res patet.

PRO-

Digitized by Google

(d) Per prac. (e) Per probl.

segmento majore; metire primò (*d*) sectores, deinde (*e*) conum, qui ablatus à sectore minori relinquit segmentum QCBD; additus verò sectori majori exibet segmentum CEDQ.

Diameter circuli CQD ad dimensionem coni QCAD necessaria reperitur sub initium *Problematis* 7. Coni autem altitudo OA etiam nota est; quia semidiameter tota BA reperta est *Probl.* 7, & BO datur, ergo, & reliqua OA nota est.

Detur deinde segmentum sphæræ inter duos circulos CQD, FRG (sive paralleli ii sint, sive non) interjectum. Metire segmenta utraque RFBG, QCBD. Minus aufer à majori. Residuum dabit segmentum RFCQDG.

Aliter.

Metiri oporteat segmenta QCBD, QCED. Ut OE ad radium AE, ita fiat OB ad aliam BK. Conus ex basi CQD, & altitudine OBK æqualis est (*a*) segmento QCBD. Hunc igitur conum metire.

(a) Per prop. 31 selectorum nostr ex Archim.

Pari modo, ut OB ad radium, ita fiat OE ad aliam Z. Conus ex basi CQD, & altitudine constante duabus rectis OE, & Z æquatur (*b*) QCED. Quare hoc per *Problema* 4 mensurato, habetur segmenti soliditas.

(b) Per eand.

Hæc praxis brevior est præcedenti.

Corollarium.

Ex hoc Problemate habetur dimensio vasorum sphæricorum: ea enim sunt sphæræ segmenta, sed inania. Esto

Digitized by Google

Esto vas sphæricum QBDC: ad opus dimensionis ejus nota esse debent diameter orificii BQCE, altitudo vasis, & diameter sphæræ, cujus vas est segmentum, quæ nota facies hunc in modum.

Bacillo, seu funiculo subtende arcum aliquem EBF, & biseca, tam arcum, quàm subtensam in punctis B, & G, per quæ extensa recta funiculi ductu, vel regulæ, est diameter (*o*) circuli ECQB, quam metire.

Deinde BC diametrum jam inventam biseca in A, & ex A demitte perpendiculum donec fundum basis contingat in D. Erit AD vasis altitudo, quam metire.

Denique fiat, ut DA jam nota ad radium AB etiam notum, ita hic idem ad aliud. Hoc erit notum, & æquale (*p*) rectæ AH, quæ cum DA diametrum sphæræ constituet. Cum igitur DA, & AH sint notæ, etiam diameter tota erit nota.

His sic inventis, vas ipsum metire, ut in Problemate præscriptum fuit.

PROBLEMA XIII.

Sphæroidis tam longæ, quàm latæ dimensio.

Sphærois longa est, quæ fit ab ellipsi circa maiorem axem circumactâ: lata sphærois est, quæ fit ab eádem ellipsi circa minorem axem revolutâ.

Omnis sphæroideos soliditas producitur à maximo ejus circulo OBDC ducto in duos trientes illius axis, circa quem producta est sphærois. V 3 Me-

Digitized by Google

(a) *Vide lem. ante probl. 2. cap. 17.*
(b) *Per probl. 4. c. 12.*

Metire igitur mechanicè (*a*) axes AE, BC, & ex BC elice (*b*) aream circuli maximi OBDC. Hæc ducta in duos trientes axis AE, circa quem sphærois producta est, dabit soliditatem sphæroidis quæsitam.

Demonstr. Intelligantur duo coni DBAC, DBEC inscripti esse sphæroidi. Demonstravi *lib. 1. Cylind. & Annul. prop. 25*, sphæroidem hujus rhombi conici esse duplam. Conus autem BAC fit ex (*c*) basi OBDC ductâ in trientem altitudinis AO, quæ est semissis axeos AE, uterque ergo (sunt enim æquales), totus nempè rhombus fit ex basi OBDC ductâ in trientes duos semiaxeos, hoc est in trientem unum axis totius AE. Ergo soliditas horum dupla, ipsius nempè sphæroideos fit ex eodem circulo OBDC ducto in duos trientes axeos AE. *Q. E. D.*

(c) *Per probl. 4. c. 18.*

PROBLEMA XIV.

Fig. 26.

Sphæroideos segmenta BFACE, BDGCE circulo ad axem AD recto secta metiri.

Intelligantur segmentis inscripti esse coni EBAC, EBDC; axis autem AD bisectus sit in N. Inventis mechanicè altitudinibus QD, QA, & diametro BC, metire (*a*) conos BAC, BDC. Tum fiat ut QD ad summam rectarum ND, QD, ita numerus cuborum coni EBAC ad alium numerum: dabit hic cubos segmenti BFACE.

(a) *Per probl. 4. c. 18.*

Et si fiat ut QA ad summam rectarum NA, QA, ita numerus cuborum coni EBDC ad

alium

alium numerum: dabit ille cubos segmenti EBDGC.

Demonstratio patet ex *Archim. lib. de sphæroid. & conoid. prop.* 31, ubi demonstrat conum BACE esse ad segmentum BFACE, ut QD ad summam rectarum ND, QD, & conum BDCE esse ad segmentum BDGCE, ut QA ad summam rectarum NA, QA.

PROBLEMA XV.

Truncum sphæroideos circulis ad axem rectis CSF, HVG utrimque terminatum metiri.

Metire axem AD, & diametros CF, HG, nec non trunci axem alterum OP, adeoque ejus semisses OQ, PQ, omnia (*a*) mechanicè. Axem vero alterum IK sphæroidis totius, cujus truncus datur, ita reperies. Centro C intervallo semiaxis dati AQ describe arcum, qui OQ secet in N. Ex C per N ducatur recta occurrens axi AD in M. Erit recta (*o*) CM par semissi axis quæsiti IK. Hæc verò effici ut possint, rectæ OQ, CO, AQ describendæ prius sunt in æquâ superficie, servatis ad O & Q rectis angulis, ac tum, quæ jam præscripta sunt, exequenda. Axem IK sic inventum itidem metire. Quia ergo QK, QI axis semisses jam notæ sunt, suprà verò etiam QP, CO factæ sunt notæ; etiam PK, SI notæ erunt.

Igitur ex diametro AD, & axe IK elice soliditatem (*b*) sphæroideos IABD; & ex diametro HG, ac altitudine PK (*c*) reperi soli-

Digitized by Google

ditatem segmenti HKG; & ex diametro CF, ac altitudine OI soliditatem segmenti CIF. Tum aufer cubos segmentorum HKG, CIF à cubis totius sphæroidis; remanebunt cubi, quibus truncus FSCHVG æqualis est.

Corollarium.

Ex Problemate habetur dimensio capacitatis eorum doliorum, quæ ad trunci sphæroidici figuram accedunt. Sed in dimensione mechanicâ linearum crassitudo asserum ab inventis lineis subducenda est.

PROBLEMA XVI.

Conoidis parabolicæ tam obtusæ, quàm acutæ dimensio.

Fig. 28. *Conois parabolica obtusa est, quæ fit à semi-parabola BAD circa axem AD revovolutâ: acuta verò, quæ fit ab eâdem semi-parabolâ circa ordinatim axi applicatam BD circumactâ.*

Parabolica conois obtusa BACF producitur ex basi BFCN, quæ circulus est, ductâ in semissem axis DA.

Conois parabolica acuta ABEG producitur ex basi DGAI, quæ etiam circulus est, ductâ in 8 decima-quintas altitudinis DB.

Demonstratio 1 partis patet ex nostrâ *prop.* 31. *lib.* 1. *Cylind. & Annul.*, ubi demonstravi, Cylindrum BK conoidi parabolicæ obtusæ BACF circumscriptum esse duplum conoidis. Quare cum (*a*) Cylindrus BK producatur ex basi

(a) *Per probl.* 1.

Digitized by Google

basi BFCN in altitudinem totam DA; ejus semissis, nempè conois B A C F producetur ex base eâdem in altitudinis ejusdem C A semissem.

Quod ad 2^{am} partem attinet, non tradidit Archimedes, quam proportionem habeat conois parabolica acuta ad obtusam, vel ad Cylindrum AL acutæ circumscriptam. Quare ex eo dimensio hujus solidi non habetur. Nos ergo *prop. 27. lib. 5. Cylind. & Annul.* demonstravimus, acutam esse ad obtusam, ut basis, sive ordinatim applicata BD est ad 16 decimasquintas axis DA; eandem verò acutam esse ad Cylindrum AL sibi circumscriptum, ut 8 ad 15: ex quo postremo manifesta est secundæ partis demonstratio.

PROBLEMA XVII.

Conoidis hyperbolicæ obtusæ dimensio.

Obtusa est, quæ gignitur à semihyperbolâ GFMH circa axem FH revolutâ: acutâ verò, quæ gignitur ab eadem semihyperbolâ circa ordinatim axi applicatam GH circumactâ. Fig. 29.

Reperiatur ex conicis hyperbolæ datæ axis tranversus, ejusque semissis sit X, quam metire, uti & axem HF, ac diametrum GI.

Demonstratum est ab Archimede in libro de Conoid., & sphæroid. *prop.* 27, conum maximum N G F I conoidi hyperbolicæ obtusæ NGMFI inscriptum esse ad conoidem, ut com-

Digitized by Google

composita ex axe HF, & duplâ X ad compositam ex axe H F, & triplâ X.

(a) *Per prob. 4.* Quare si notus fiat (*a*) conus N G F I, ac deinde fiat, ut composita ex axe H F, & duplâ X (quæ nota est) ad compositam ex axe H F, & triplâ X (quæ etiam nota est) ita conus N G F I (& ipse notus) ad aliud; erit hoc ipsa conois quæsita in cubis mensuræ assumptæ.

Scholium.

Quam proportionem habeat conois hyperbolica acuta FGK *ad conum sibi inscriptum, & ad conoidem hyperbolicam obtusam* GFI *adhuc latet. Imò, quod admiratione dignum est, inventâ hac proportione, haberi quadraturam hyperbolæ ostendi* lib. 5. Cylind., & Annul. prop. 45.

PROBLEMA XVIII.

Dimensio corporum, & superficierum Annularium.

ANnularia corpora, si quæ alia, affectiones habent planè admirabiles. De his atque unà de Cylindricis quatuor libros vulgavi anno 51, quibus anno deinde 59 quintum adjunxi.

Fig. 41. *Hujusmodi solidorum duas quasi classes, sive genera constituo. Primi generis sunt, quæ fiunt ex quâcumque figurâ planâ CKBF axem aliquem KF habente circa aliquam lineam XZ (quæ Axis revolutionis dicitur) hâc*

lege

lege in orbem ductâ, ut KF axis figuræ revolutionis tempore axi revolutionis XZ semper æquidistet. Multiplices horum formas expressas reperiet lector in schematismis lib. 3, & 4. Cyl. & Annul. *præsertim in schematismo* 8, *Fig.* 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Secundi generis sunt ea omnia, quæ gignuntur ex revolutione figurarum, vel axem nullum habentium, aut certè, dum revolutio fit, non parallelum axi revolutionis. Vide Fig. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 *&c.* libri 5. Cyl., & Annul.

Quanta sit horum corporum varietas intelligi poterit ex figuris jam citatis, & definitionibus lib. tertio Annul., *ac inprimis* quinto *præfixis*.

Quia verò definitionum jam facta est mentio, monendus mihi est lector, ut errorem emendet, qui irrepsit in definitionem 1 lib. 3 Cylindr., & annul. Paginâ 116, versu 1 *hæc leguntur*: Sicut recta ABC in uno feratur plano, & figura, dum circumducitur, sibi ipsi maneat parallela, *quæ sic emenda, vel potius supple*...: sic, ut recta ABC in uno feratur plano ad EK recto, & figura dum circumducitur, EK sibi ipsi maneat parallela.

Solidorum, ac superficierum annularium primi generis dimensio.

Soliditas cujuscumque corporis annularis primi generis producitur ex figurâ genitrice ECKBF ductâ in peripheriam mediam ED, cujus radius est distantia axis figuræ FK ab revolutionis axe XZ. *Fig.* 41.

Ex-

Exemplum. Figura ECKBF, quæ annulum genuit, reperta sit pollicum quadratorum 1000, peripheria verò media ED pollicum 2000. Hæc invicem multiplicantia efficiunt pollices cubicos 2000000, quibus solidum annulare æquale est.

Superficies verò annulares primi generis producuntur ex circumferentiâ GKBF figuræ genitricis ductâ in eamdem peripheriam mediam AD.

Exemplum. Peripheria CKBF esto pollicum 100, ED pollicum 30. Hæ ductæ in invicem efficiunt pollices quadratos 3000, quibus annularis superficies proposita æqualis est.

Demonstr. Primæ partis deducitur ex prop. nostrâ 5, *lib.* 3. *Annul.* quæ ita habet: Omnis annulus, qui à figurâ planâ quacumque axem habente revolutionis axi perpendicularem producitur, æqualis est cylindro, cujus basis est figura annulum describens, altitudo autem peripheria media. Geometricam hujus theorematis demonstrationem attuli ibidem. Demonstrationes Cavallerii, & Guldini non concludunt: Guldini quidem quia assumpto indemonstrato nititur, de quo mox infrâ. Cavallerii autem quia per superficies concludit de solido, & per lineas de superficie, quæ argumentatio per se est nulla, cum inter lineas, & superficies, atque inter has, & solida proportio non sit. Hunc modum probandi hausit à Kepplero in *Stereometriâ novâ theor.* 2 ubi aliquod istius methodi rudimentum apparet. Cæterùm ratiocinatio à Kepplero isthic allata planè ageometrica, & vitiosa est, & à mente

te Archimedis, quam non est assecutus, peni aliena.

Demonstratio. partis secundæ patet ex *pr* 6 *lib*. 4. *Annularium*, quæ est ejusmoc superficies annuli, quem figura plana curvi nea quæcumque genuit, æqualis est cur superficiei cylindri recti, cujus basis est ger trix annuli figura, altitudo verò peripheri media. Geometricam hujus theorematis d monstrationem loco jam citato reperies.

Solidorum, & superficierum annularium secundi generis dimensio.

Soliditas cujuscumque corporis annula secundi generis producitur ex figurâ DECB, q annulum genuit, ductâ in circuli circumfere tiam, quam in revolutione Z centrum gra tatis figuræ DBCE descripsit.

Superficies verò annulares secundi gene producuntur ex perimetro figuræ annulu gignentis ductâ in circumferentiam à figu gravitatis centro descriptam.

Bimembris ista assertio, seu potiùs regu generalis quævis rotunda solida metiendi Paulo Guldino nostro absque demonstratio ullâ assumitur *cap.8. lib.2. Centrobarices*: à q deinde reliqua libri illius secundi pars, terti verò, quartusque integri dependent. Est por ea regula longè pulcherrima, ac usus propè ir mensi: veritatis autem tam est arcanæ, tantur que abest, ut absque demonstratione legitin assumi possit, ut nudè proposita nullam veri militudinem ostendat. Quæ etiam causa n impu-

impulit, ut in ejus demonstrationem incumberem, quam dedi libro 5 Cyl.& Annul. primâ, & secundâ parte ejusdem libri.

CAPUT XIX.

Dimensio liquidorum.

CUm humidum non suo, sed alieno termino contineatur, manifestum est, ut ejus quantitas cognoscatur, inveniendam esse vasis, quo continetur, quantitatem. Quamvis autem vasis quantitas, seu potius capacitas iisdem rationibus, quibus aliud quodcumque solidum indagari possit: tamen quia solidum inane spatium varias intra se operationes admittit, quas solida plena excludunt, fit ut liquidorum dimensio etiam methodo perficiatur sibi propriâ, quam hoc capite statui exponere; sed strictim, & quàm potero clarè. Neque enim probare possum quorumdam hoc in genere scribendi rationem, qui in re non admodum difficili eâ prolixitate, & (quod etiam deterius est) obscuritate versantur, ut tyronibus desperationem intelligendi, peritioribus tædium moveant, vel risum. Quod tribus verbis, si ad figuram referas, exponi potest, longis, & obscuris verborum ambagibus intricant magis quàm explicant; soliciti nimirùm, ut stylum in Geometrico argumento exerceant, de accuratâ verò schematis descriptione unicè securi, ut subinde vix duæ, tresve litteræ textus designatrices cum litteris schemati appictis conveniant. Non eò ista dico, ut (quod agrestis ingenii est) puritatem sermonis contemnam: sed hoc ago, ne intempesti-

pestivâ sermonis curâ brevitas ammittatur, & claritas, quibus primæ in omni scriptione partes debentur.

Mensuræ liquidorum.

Pro locorum varietate sunt variæ. Hoc omnibus commune, unam esse minimam, sive primam, ex qua cæteræ majores componuntur. Quantitas liquidi minimam mensuram efficiens à repub. determinanda est: quæ quia offertur plerumque contenta vase irregulari, aut certè non rectangulo, artificio Geometrico ad cubos ex. gr. pollicares (ut infrà tradam) erit reducenda.

Mensuræ liquidorum in plerisque Belgii locis usitatiores sunt hæ,

Chopina		*een*	*uperken*
Pinta	Æ	2	Chopinis
Poculum	Æ	4	Chopinis, 2 pintis.
Stupa	Æ	8	Chopinis, 4 pintis, 2 poculis.
Cadus	Æ	400	Chopinis, 200 pintis, 100 poculis.

Quæ requirantur ad dimensionem liquidi.

Metiri liquidum, ex. gr. dolium vini nihil aliud est, quàm invenire quot contineat mensuras, ex. gr. quot chopinas, vel pintas &c. Ut hoc obtineatur, tria sunt exequenda.

1. Quantitas liquidi, sive capacitas vasis liquidum continentis metienda est cubis pollicaribus (hi enim sunt huic negotio accomodati) hoc

Digitized by Google

hoc est indagare oportet, quot pollices cubicos contineat.

2. Iisdem cubis pollicaribus metienda est una aliqua liquidi mensura, ex. gr. una chopina, vel una pinta.

3. Ex collatione cuborum totius liquidi cum cubis mensuræ unius eliciendus est per regulam proportionum (ut docebo infrà) numerus mensurarum in dato liquido contentarum.

Hæc tria igitur, quantum erit necesse deinceps exequemur. Porrò quod ad primum attinet, id jam effectum est *cap.* 17. *&* 18. Non facilè enim vas offeretur liquidum continens, cujus quantitas per illthic tradita in placito genere cuborum non innotescat. Tamen circa perticam, seu regulam mensoriam, cujus formam tradidi *cap.* 5. ad *defin.* 8, observa, necesse esse, ut pollices singuli (qui sunt partes decimæ unius pedis) divisi sint in 10 partes æquales; convenire autem, ut hæ singulæ rursum in 10 æquales subdividantur, aut in 5 saltem, vel duas. Ubi etiam illud nota, commodius esse, ut numerus pollicum applicatione regulæ inventus accipiatur pro integro, non verò (ut alias fieri assolet) numerus pedum ex. gr. hoc numero 38. 6' 9'' designentur pollices 38, sex decimæ unius pollicis, & novem centesimæ ejusdem. Non verò pedes 38, 6 decimæ unius pedis, & 9 centesimæ.

Cæterùm quia vasa, sive dolia, quibus cerevisia, & vinum solent contineri, plerumque constant ex duobus truncis conicis, in hujus solidi dimensione facili, & expeditâ præcipua cura versari debet. Geometrica trunci conici dimen-

mensio tradita jam est *prob. 6. cap.* 18. Sed quia hæc requirit integrationem utriusque trunci ACDB, AEFB, aliam hìc novam afferemus, quæ trunci integratione non indigeat. *Fig.* 18.

PROBLEMA I.

Capacitatem vasis ex duobus conicis truncis compositi aliter, quàm prob. 6. cap. 18, reddere notam in cubis pollicaribus.

SEctio vasis per axem FI esto planum GAHKCD: Sectio autem unius trunci sit GACD. GD est diameter minoris circuli, seu baseos trunci, AC diameter baseos majoris, quæ sunt ambæ ad axem rectæ. Intelligatur deinde, ductâ GM parallelâ ad FB, adeoque ad AB rectâ, trapezium FGAB diremptum esse in rectangulum FGMB, & triangulum MGA: quæ si simul utraque circa axem FB circumagantur, producetur à rectangulo FGMB, cylindrus; à triangulo segmentum coni intus cavum, sive tubus conicus; à toto trapezio FGAB truncus ipse; cujus sectio est DGAC; qui proinde ex dicto cylindro, & tubo conico compositus est. Itaque ad dimensionem trunci tantùm opus duo illa solida metiri: quod fiet hunc in modum. *Fig.* 39.

Praxis. Regulâ mensoriâ axem FB, & diametros GD, AC fac notas in pollicibus, hoc est, reperi quot pollices contineant, subductâ utrobique asserum crassitie. Tum verò etiam noti erunt radii GF, AB, eorumque differentia AM. His peractis,

Digitized by Google

Semissem axeos FB, sive G M duc in differentiam AM: provenient pollices quadrati trianguli (n) rectanguli AMG.

(n) Per prob. 4. c. 11.

Trientem N M differentiæ A M adde radio minori GF, seu MB, erit tota NB nota: ex qua tamquam radio elice (a) circumferentiam ipsi debitam. Hanc circumferentiam duc in aream trianguli AMG: producentur (o) cubi pollicares, quibus æquatur tubus conicus à triangulo circa FB rotato genitus.

(a) Per prob. 3. c. 12.

(o) Per 2. partem probl. 18. cap. 18.

Axem F B duc in minorem radium F G: productum dabit (p) pollices quadratos rectanguli FGMB. Tum ex FQ semisse minoris radii FG tamquam radio elice (q) circumferentiam, qua ductâ in aream rectanguli FGMB, provenient cubi pollicares debiti cylindro genito à rectangulo F GM B circa F B rotato.

(p) Per prob. 1. c. 11.

(q) Per prob. 3. c. 12.

Denique cubos pollicares tubi conici, & cylindri collige in unam summam; hæc dabit pollicares cubos, quibus trunci AGDC inane spatium æquale est.

Quod si truncus alter AHKC priori, ut fit plerumque, similis, & æqualis est, duplicata capacitas prioris dabit capacitatem totius vasis. Sin verò dissimilis est, mensurabitur eâdem methodo, qua prior.

Demonstratio. Biseca MA in E, & duc rectam GE, cujus triens sit OE. Erit O centrum gravitatis trianguli MGA. Ducatur deinde OP ad axem FB recta, adeoque parallela ad AB. Ut GO ad GE (c), sic OS ad EM. Sed GO est duæ tertiæ ipsius GE. Ergo O S etiam est duæ tertiæ ipsius EM, hoc est una tertia ejus duplæ MA. Ergo O P radius circumferentiæ ab gravitatis

(c) Per coroll. 1. p. 4. l. 6.

menſura in liquido continetur, quamplurimas oportebit menſuras accipere, & quot omnibus ſimul ſumptis pollicares cubi debeantur, invenire, tum verò, quot uni menſuræ conveniant, per regulam Auream innoteſcet.

Fig. 31. *Praxis*. Oporteat ex. gr. pintam ad cubos reducere. Paretur vas parallelepipedale rectangulum plurium cadorum capax AF, cui infundantur aliquot pintarum centuriæ quàm accuratiſſimè dimenſæ, ex. gr. 600, quæ efficiunt 3 cados: & pertingat liquidi ſuperficies uſque in KLED. Debet autem vas ita collocari, ut planum ABC exactè æquidiſtet horizonti. Explora deinde quot pollices contineant latera AB, BC, BD (ſubductâ aſſerum craſſitie) quæ per invicem (*a*) multiplicata, dabunt cubos pollicares, quibus liquidum A K E C æquale eſt. Sint ex. gr. pollices cubici 39609. Tum ita ratiocinare; 600 pintæ æquantur cubis pollicaribus 39609: igitur una pinta quot pollicaribus cubis æqualis erit? Per regulam proportionum, quæ hìc abſolvitur ſolâ diviſione cuborum 39609 liquidi AKEC per 600 pintas eodem liquido contentas, reperiuntur cubi pollicares debiti pintæ uni 66. 0' 1" 5'''.

(a) *Juxta prob. 1. c. 17.*

PROBLEMA III.

Dati liquidi quovis vaſe contenti dimenſio.

VAs liquidum continens, ſi (quod fit plerumque) ex duobus truncis conicis compoſitum ſit, ad cubicos pollicares revoca per *probl. 1 cap. hujus*, aut per *probl. 6 cap. 18*: ſi al-

Digitized by Google

liariorum Bonon. 26010, ex qua elicitur diameter milliar. Bonon. 8279 $\frac{57}{311}$ Quare si milliaria Bonon. 26010 ducantur in milliar. Bonon. 8279, fractione neglectâ, proveniunt milliar. quadrata Bonon. 215, 336, 790 constituentia superficiem Terræ proximam veræ.

Si placet ad pedes quadratos revocare, sic operare. Quia milliare Bonon. continet 5000 pedum Bonon. si hæc ducantur in se, provenient 25 (000, 000 pedum quadratorum pro milliari quadrato Bonon. Quare si quadrata milliaria superficiei terræ jam inventa ducantur in 25 (000, 000 pedum quadratorum unius milliaris quadrati, provenient 5, 383 (419, 750 (000, 000 pedum quadratorum Bonon. in superficie orbis Terræ contentorum.

Et quia milliare horarium triplum est Bononiensis, ac proinde milliare horarium quadratum noncuplum est milliaris quadrati Bonon., ut patet ex *prop. 6. cap.* 13, si numerus quadratorum milliariorum Bonon. jam inventus dividatur per 9, provenient milliaria quadrata horaria superficiei Terræ 23, (926, 310.

Quod si hæc ipsa voluerimus reducere ad pedes Rhynlandicos, quorum 18, 000 conficiunt milliare unius horæ; duc 18, 000 in se: provenient 324 (000, 000 quadrati pedes pro uno quadrato milliari horario: per quæ si multiplices quadrata milliaria jam inventa 23 (926, 310; provenient pedum quadratorum Rhynland. 7, 752 (124, 440 (000, 000, quibus Terræ superficies æqualis est.

Su-

Superficies Terræ proxima veræ continet

Milliaria quadrata Bonon. 215 (336 , 790
Milliaria quadrata horaria 23 (926 , 310
Pedes quadratos Bonon. 5 , 383 (419 , 750 (000 , 000
Pedes quadratos Rhynl. 7 , 752 (124 , 440 (000 , 000
Mill. quadr. Bonon. continet pedes quadr. Bonon. 25 (000 , 000
Milliare quadr. horar. continet pedes quadr. Rhenolandicos . 324 (000 , 000

Superficies Terræ omnium hactenus inventarum minima ea est, quæ continet

Milliaria quadrata Bonon. 134 (030 , 859
Milliaria quadrata horaria . 14 (890 , 680
Pedes quadratos Rhynlandicos 4 , 824 (580 , 320 (000 , 000

Hæc Terræ ſuperficies minima deducta eſt ex minimâ diametro, & minima circumferentiâ , quas vide ad finem *prob. 4. cap. 6.*

PROBLEMA II.

Quantam ſuperficiei Terrenæ partem occupatura ſit tota hominum collectio in extremo judicio.

IMperiti Geometriæ univerſam terræ ſuperficiem vix ſuffecturam arbitrantur. Quantùm errent ex iis, quæ hìc ſubjungam, apparebit.

Quoniam tam mundi duratio, quàm hominum multitudo sunt nobis incognitæ, statuenda erunt quædam, ut certi aliquid liceat de quæstione propositâ definire: Ponantur verò hæc 1. Mundum duraturum 10, 000 annorum. 2. Numerum hominum simul viventium semper esse 1, 000 (000, 000, id est mille millionum. 3. Singulis 50 annis totum genus humanum innovari adæquatè. 4. Singulis hominibus detur spatium 5 pedum quadratorum Rhynl

His positis dico, locum à totâ illâ hominum collectione occupandum minorem fore respectu superficiei terrestris, quàm sit 1 respectu 4824, quod spatium minus est quàm Anglia, & vix quintam æquat partem Hispaniæ.

Demonstratio. Ut propositum conficiatur efficaciùs, assumam terræ superficiem omnium hactenus inventarum minimam, quam satis constat esse verà minorem; videlicet pedum quadrat. rhynland. 4, 824 (580, 320 (000, 000.

Quia per positionem 1, mundus stabit 10, 000 annorum, & numerus simul viventium semper est mille milliones per posit. 2, & hic numerus per posit. 3 singulis 50 annis totaliter innovatur; manifestum est, in totâ hominum collectione toties contineri mille milliones, quoties 50 continetur in 10, 000, nimirum ducenties. Quare tota hominum collectio efficiet ducenta millia millionum, 200, 000 (000, 000. Per hunc numerum si dividatur numerus superficiei terrenæ minimæ suprà allatus, proveniet quotiens 24122 $\frac{180320000000}{200000000000}$, qui indicabit, quoties hominum tota collectio stare possit in su-

ſuperficie Terræ, ſingulis unum pedem quadratum Rhynl. occupantibus. Hìc quotiens ſi rurſum dividatur per 5; proveniet quotiens novus 4824 $\frac{58032000000}{1666666666666}$, indicans quoties tota collectio hominum ſtare poſſit in ſuperficie terræ, ſingulis 5 pedes quadratos Rhynl. occupantibus, ac proinde quota ea ſit terrenæ ſuperficiei pars, quæ à dictâ hominum collectione occuparetur, dando ſingulis, ut dixi pedes quadr. 5. Itaque quoniam numerus partem occupatam denominans eſt 4824 cum fractione, ac proinde major quàm 4824, liquet partem ſuperficiei terrenæ occupatam minorem eſſe parte quatermilleſimâ octingenteſimâ vigeſimâ quartâ.

Reliquum eſt, ut oſtendam hoc terræ ſpatium eſſe minus Angliâ.

Circulus terræ maximus ſit BFCH, in quo perpendiculariter ſe interſecent duæ diametri BC, FH. Ex B in D, & E numerentur utrimque duo gradus, ducaturque recta DE, quæ diametro BC occurret perpendiculariter in G. Abſcindatur deinde plano ad BC recto ſuperficies DVEB. Hæc erit minor quàm Anglia: ſi enim circini crure uno fixo in puncto maximè centrali hujus provinciæ, crus alterum ad duos gradus deductum per ſuperficiem globi Geographici circumduxeris. Superficies hoc circuitu comprehenſa erit ipſa DVEB, totaque exiſtet intra limites Angliæ, adhuc excluſâ magnâ ejuſdem portione. Experimentum ipſe ſumpſi in globo, cujus diameter erat pedum ferè trium. Atqui ſuperficies, quæ ab hominum collectione ſuprà dictâ occuparetur, minor eſt ſuperficie DVEB; quod ſic oſtendo. Fig. 32.

Quia

Quia arcus BD est grad. 2, erit FD grad. 88; cujus Sinus DK, seu GA est 99939; quo sublato ab A B radio 100000, relinquuntur 61 pro B G: per quæ si dividatur B C diameter 200000, prodit quotiens 3278 $\frac{42}{61}$ indicans quoties BG contineatur in BC. Quare cum sit, ut BG ad BC, ita (*a*) superficies DVEB ad totam Sphæræ terr. superficiem, idem quotiens 3278 $\frac{42}{61}$ etiam indicabit quoties superficies DVEB contineatur in superficie totâ Sphæræ terrestris. Atqui suprà ostensum est, superficiem à supradictâ hominum collectione occupandam contineri plusquam vicibus 4824 in superficie terrenâ, ac proinde sæpius quàm portio D V E B, quam jam ostendi contineri solùm vicibus 3278. Ergo superficies ab hominum collectione occupanda minor est quàm DVEB; hoc est (ut suprà probavimus) minor quàm Anglia.

(a) *Per p. 27. select. nostrorum ex Archim.*

Nihil est igitur, quod vereantur aliqui ne judicandæ hominum multitudini locus desit. Illud nobis curæ sit, ita vitam instituere, ut in die illâ tremendâ non hæreamus in terrâ damnandi cum impiis, sed corporibus induti gloriosis in nubibus obviam Christo rapiamur in aera.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA III.

Quanta orbis terræ pars sit aliquod regnum, vel provincia, licèt tam ejus, quàm terræ quantitas ignoretur, facili conjecturâ explorare.

EXemplum statuamus in Regno Hispaniæ. In globo Geographico intra eam portionem, quæ Hispaniam ræpresentat, eligatur punctum, quàm maximè fieri potest, medium, seu centrale, in quo uno circini crure fixo, alterum ita deducito, ut eo per superficiem globi circumducto, superficies eo circuitu inclusa oculorum judicio sit quàm proximè æqualis Hispaniæ. Tum eam circini aperturam transfer in Æquatorem, & vide quot gradus comprehendat. In casu proposito reperi contineri gradus 4 min. 20. *Fig. 32.*

His peractis, circulum Terræ maximum referat BFCH, in quo perpendiculariter se intersecent diametri, BC, FH, & ex B numerentur in D, & E utrimque gradus 4. 20'. Deinde per D, & E plano ad B C recto abscindatur superficies DVEB, quæ erit Hispaniæ æqualis. Et quoniam arcus BD est grad. 4. 20', erit arcus D F grad. 85. 40', cujus Sinus DK, seu GA est 99714; quo ablato à radio 100000, remanent 286 pro BG: per quæ si dividatur diameter BC 200000, fit quotiens 699 $\frac{86}{286}$ indicans quoties BG contineatur in BC, Atqui ut BG ad BC, ita (a) est superficies DVEB ad superficiem totam terrestris *Fig. 32.*

(a) *Per p 27. selectorum nostr. ex Arcbim.*

Digitized by Google

ſtris globi. Ergo idem quotiens 699 [illegible] indicat etiam quot vicibus ſuperficies DVEB, hoc eſt Hiſpania contineatur in totâ ſuperficie terræ, nempè plus quàm 699 vicibus. Hiſpania igitur eſt pars orbis Terræ minor, quàm ſexcenteſiſima nonageſima nona.

Similis conjectura eodem artificio de aliis etiam provinciis formabitur.

PROBLEMA IV.

Quæ ſit inter Zonas frigidam, torridam, temperatam magnitudinis proportio, licèt tam earum, quàm terrenæ ſuperficiei quantitas ignoretur, invenire.

Fig. 33. Circulus Terræ maximus per polos B, C tranſiens, eſto BFCH; axis mundi BC, diameter Æquatoris FH; diametri Tropicorum IL, & PQ; diametri circulorum Polarium DE, & RT.

Polaris circuli à polo diſtantia, nimirum arcus DB eſt grad. 23. 30', quibus ſubductis à 90, reſtant grad. 66. 30' pro arcu DF; cujus Sinus DK, ſeu GA 91706 ſi auferatur à radio AB 100000, remanent 8294 pro BG.

Diſtantia Tropici ab Æquatore, arcus nempè IF, eſt grad. 23. 30' hujus Sinus IX, ſive MA eſt 39874.

Quod ſi MA 39874 auferas ab GA 91706, remanent pro GM 51832. Igitur BG, GM, MA ſunt inter ſe, ut hi numeri 8294, 51832, 39874.

Atqui

Atqui segmenta superficiei sphæricæ, quarum latitudines sunt arcus BD, DI, IF (hoc est zonæ ipsæ frigida, temperata, torrida) eam inter se rationem habeant (a), quam partes axis BG, GM, MA. Ergo etiam zonæ frigida, temperata, torrida sunt inter se, ut hi numeri 8294, 51832, 39874.

(a) *per p. 27. select. à nobis ex Arch.*

Frigida	8294
Temperata	51832
Torrida	39874

Itaque temperata continet frigidam plus quàm sexies, torridam minus duplo, ut divisione factâ apparebit: utrisque verò simul sumptis major est, quod parebit additione.

Nota: *cum zona temperata unà comparatur cum torridâ, unam ejus semissem tantùm accipi: Æquator enim torridam zonam dividens, duas quasi torridas zonas utrimque constituit.*

PROBLEMA V.

Orbem Terræ metiri.

P*Roblemate* 10 *cap.* 18 demonstratum est, soliditatem globi cujusvis haberi ex superficie globi ductâ in diametri sextantem. Superficies terræ proxima veræ *Probl.* 1 reperta est, in milliariis quadratis Bonon. in milliariis quadratis horariis, in pedibus quadratis Rhynl. Diameter Terræ veræ proxima inventa est *cap.* 6. *Probl.* 4. milliariorum Bonon. 8279, (quorum sextans est 1379); milliariorum verò hora-

horariorum 2759, quorum sextans est 459, fractionibus ubique (quod hic sine detrimento licet) neglectis. Itaque si milliaria quadr. Bonon. superficiei Terræ 215 (336, 790 ducantur in milliaria Bonon. 1379 sextantem diametri, proveniunt milliaria cubica Bonon. 296, 949 (433, 410 pro soliditate Terræ. Quod si millaria quadrata horaria superficiei Terræ 23 (926, 310 ducantur in milliaria horaria 459 sextantem diametri, provenient milliaria cubica horaria 10, 982 (176, 290 pro eâdem soliditate Terræ. Denique ut habeatur soliditas Terræ in pedibus cubicis Rynlandicis, prius sextans diametri, mill. nimirum Rynlandica 459 reducenda sunt ad pedes Rhynl, quod fiet si 459 ducantur in 18000, tot enim in uno milliari horario pedes Rynl. continentur. Productum hujus multiplicationis exhibet 8 (262, 000 Pedes Rynl. pro sextante diametri; per quos si multiplicentur pedes quadr. Rhynlandici superficiei Terræ 7, 752 (124, 440 (000, 000, provenient pro soliditate Terræ pedes cubici Rhynlan. 64, 048 (052, 123 (280, 000 (000, 000, quæ omnia sequenti Tabellâ exhibentur.

Soliditas Orbis Terræ veræ proxima

Continet

Milliaria cubica Bonon.	296, 949 (433, 410
Milliaria cubica Horar.	10, 982 (176, 290
Pedes cubicos Rhynlan.	64, 048 (052, 123 (280, 000 (000, 000.

Mil-

Digitized by Google

Milliare cubicum Bonon. continet Ped. cub. Bonon. 125, 000 (000, 000. Milliare cubicum Horar. continet Ped. cubic. Rhynlan. 5 (832, 000 (000, 000.

Quod si desideretur soliditas Terræ minima, ad hanc assumenda est minima superficies *præced. Problemate* inventa, diameter item minima, quæ *cap. 6. Probl. 4.* reperta fuit milliariorum Bonon. 6531 (quorum sextans est 1088), milliariorum verò horariorum 2177, quorum sextans est 362, fractionibus ubique omissis. Cum his datis, operando ut suprà, prodibit Terræ soliditas minima, ut in Tabellâ sequenti cernitur

Orbis Terræ soliditas omnium hactenus inventarum minima

Continet

Milliaria cubica Bonon.	145, 825 (574, 592
Milliaria cubica Horar.	5, 390 (426, 160
Pedes cubicos Rhynlan.	1 (746, 498 (075, 840 (000, 000

PROBLEMA VI.

Soliditatem Oceani explorare.

PRænosci debent Oceani superficies, & profunditas. Superficies, ut in omnibus sphæris Geographicis cernitur, superficiei terrarum ferè æqualis est, ac proinde dimidia superficiei totius globi terraquei. Tantam ergo hìc assumemus. Profunditas quo artificio exploranda sit,

Digitized by Google

sit, dicam in Staticâ. Interim ex nautarum experimentis Oceani ordinaria profunditas non excedit 500 passus. Alicubi profunditatis inscrutabilis est. Ut excessus defectu compensetur, demus æquare eam ubique unum milliare Bonon., hoc est trientem milliaris horarii, hoc est 6000 pedum Rhynlandicorum.

His datis, soliditas maris sic innotescet. Terræ diameter continet milliaria Bonon. 8279. Ab hac aufer 1 milliare profunditatis Oceani, remanent 8278. Superficies globi, cujus diameter est milliaria Bonon. 8278, reperitur per *Probl. cap.* 18 milliariorum quadr. Bononiens. 215 (225, 656: quæ ducta in sextantem diametri 8278, nimirùm in 1379, exhibent (b) milliaria cubica Bonon. globi, cujus diameter est 8278, nempè 296, 796 (179, 624: quibus subductis à soliditate sphæræ, cujus diameter est 8279, hoc est à soliditate Terræ constante milliariis cubicis Bonon. 296, 949 (433, 410, remanent milliaria cubica Bonon. 153 (253, 786, quibus æqualis esset Oceani soliditas, si totam globi terraquei superficiem occuparet. Nuncquando solùm dimidiam partem occupat, numeri postremi semissis 76 (626, 893 exhibet milliaria cubica Bonon. soliditatis Oceani. Per hanc si dividatur Terræ soliditas 296, 949 (433, 410: reperietur in hâc illa contineri plus quàm vicibus 3875. Ex quo apparet quàm ridiculi fuerint nonnulli Philosophi, qui nescio quibus freti conjecturis, elementa decuplam inter se habere proportionem existimarunt.

(b) *Per prob.* 1. c. 18.

PRO-

PROBLEMA VII.

Modus generalis inveſtigandi magnitudinem cujuſvis Aſtri.

UT inveniatur magnitudo Aſtri cujuſcumque, prænoſci debent ejus diſtantia à Terræ centro, vel ſuperficie, & quantitas apparens diametri, ſive angulus BFC, ſub quo Aſtrum videtur, is enim metitur quantitatem arcus, adeoque & diametri BC, quæ ab arcu inſenſibiliter differt. Quo artificio innoteſcant diſtantiæ Lunæ, ac Solis à Terrâ, expoſui *cap.* 8. & 9. Sed accuratiùs iſta deduxi Aſtronomiæ *lib.* 3, ubi etiam traditus eſt modus obſervandi diametrum apparentem Solis, & Lunæ. *Fig.* 34.

His ergo datis, magnitudo Aſtri ita inveſtigabitur. Centrum terræ eſto A; oculus F in ſuperficie Terræ; BFC angulus, ſub quo videtur Aſtrum EBDC. Centro F per N Lunæ centrum intelligatur deſcripta peripheria circuli GCBK. Quoniam (*a*) angulus BFC notus eſt, etiam notus eſt arcus BC, quota nimirùm pars ſit peripheriæ totius KBCG. Quare cum Aſtri diameter arcum ſubtendens ab arcu inſenſibiliter differat, ſcietur etiam quota pars peripheriæ KBCG ſit Aſtri diameter. Deinde quia F N diſtantia Aſtri à Terrâ nota (*b*) eſt in Terræ ſemidiametris AF, eſtque FN radius peripheriæ KBCG; etiam ipſa peripheria KBCG in Terræ ſemidiametris fiet (*c*) nota. Atqui jam invenimus ſuprà quota Peripheriæ KBCG pars ſit diameter BC. Ergo etiam hæc in Terræ ſemidiametris, aut in partibus ſemidia-

(a) Per *hyp.*

(b) Per *hyp.*

(c) Per *prob.* 3. *c.* 12.

Digitized by Google

metri innotescet; hoc est innotescet proportio diametri ipsius Astri ad diametrum Terræ. Quæ

Diam. Astri, Diam. Ter. X; Z

ratio si per 4 terminos continuetur, hoc est si fiat ut diameter Astri ad diametrum Terræ, ita hæc ad X, & ita X ad Z; erit Astrum ad Terram, ut diameter Astri ad quartum numerum Z; uti patet ex ultimâ, *lib.* 12.

Nota, *BC diametrum apparentem minorem esse diametro verâ, sed insensibiliter, ut ostendi in* Astron. lib. 4. *Quare BC tum hìc, tum* Probl. 7, *&* 8 *assumo pro verâ, sic enim Lunæ, & Solis magnitudo colligetur (quod intendo) verâ minor.*

Corollarium.

Quò distantia Astri à Terrâ, & diameter ejusdem apparens assumuntur minora, eò minor proveniet Astri moles, & è converso. Patet ex discursu toto Problematis.

PROBLEMA VIII.

Inquiritur magnitudo Lunæ.

Fig. 34. Solem esse Terrâ majorem, Lunam Terrâ minorem, manifestum est ex eclipse Lunari. Sed quantò hæc minor, ille major, deinceps investigabitur.

Terræ centrum esto A; in superficie Terræ oculus F; angulus, sub quo Luna spectatur, BFC; peripheria centro F per Lunæ centrum des-

Digitized by Google

descripta sit KNG. Demonstravi *Probl.* 1. *cap.*8. EN distantiam Lunæ Perigeæ à Terrâ in quadraturis esse majorem 50 semidiametris Terræ. Deinde ex observatione omnium Astronomorum constat, diametrum (*f*) apparentem Lunæ Perigeæ, sive angulum BFC majorem esse minutis 30. Assumam tamen distantiam EN semid. Terræ 50, & apparentem diametrum 30 minutorum: sic enim certò constabit, molem Lunæ ex iis deductam fore verâ minorem.

(f) *Vide Ricciolum pag.* 233. *tom.* 1.

Quoniam FN radius peripheriæ KBCG est semid. Terræ 50, ac proinde diameter tota continet semidiametros Terræ 100. Ex eâ per *Prob.* 3. *cap.* 12. elicitur peripheria KNG semid. Terræ $314\frac{18}{113}$ sive $314.\ 1'5''9'''2^{iv}$. Est autem angulus BFC, adeoque, & arcus BC 30 min. Si ergo peripheria tota, hoc est gradus 360 efficiunt semid. Terræ $314.\ 1'5''9'''2^{iv}$: 30 minuta, sive $\frac{1}{2}$ gradus unius quot efficiet semidiametros? Per regulam proport. proveniunt $0.\ 4'3''6'''3^{iv}3^{v}2^{vi}$, unius semidiametri Terræ pro arcu BC, hoc est pro diametro Lunæ, quæ ab arcu BC quoad sensum non differt. Quæ quidem quantitas Lunaris diametri vera minor est, cum deducta sit ex distantiâ, & apparente diametro, quæ minores sunt veris. Sed demus, Lunæ diametrum esse $0.\ 4'3''6'''3^{iv}3^{v}2^{vi}$, quarum Terræ semidiameter est 1, ac proinde tota Terræ diameter est 2; imò demus, solùm esse $0.\ 4'3''6'''$, & continuetur ratio $0.\ 4'3''6'''$ ad 2 per quatuor terminos.

Diam. Lunæ	Diam. Ter.		
$0.\ 4'3''6'''$	2	$9.\ 1'7''5'''$.	$42.\ 0'9''1'''$.

erit, ut primus 0. 4' 3" 6''' ad quartum 42.
(d) Per 18. 21. 0' 9" 1''', ita Luna (*d*) ad Terram. Diviso autem quarto per primum, quotiens prodit 96 cum fractione.

Itaque certum est Lunam esse majorem parte 97ma Terræ.

Nota, terminis tertio, & quarto loco fractionum ipsis adhærentium, adjectam esse unitatem; unde evaserunt justo majores, ex quo etiam capite, præter cætera, prodiit Lunæ quantitas verâ minor.

Corollarium.

Semidiameter Lunæ certò major est milliariis Bonon. 711.

Nam semid. Terræ est ad semid. Lunæ in minori ratione, quàm 2 ad 0. 4' 3" 6'''. Semidiameter autem Terræ minima hactenùs inventarum continet mill. Bonon. 3265; unde per *reg. prop.* elicitur Lunæ semid. major milliariis Bonon. 711.

Scholium.

Si data assumamus cum Ricciolo veris similiora, nimirum distantiam mediocrem Lunæ à Terræ centro semid. Terræ 59, & diametrum apparentem min. 30.30' reperiemus diametrum Lunæ veram esse ad diametrum Terræ, ut $26\frac{1}{2}$ *ad* 100; *atque inde Lunam esse ad Terram, ut* 1 *ad* 55. *Quæ magnitudo ad veram propiùs accedit.*

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA IX.

Inquiritur magnitudo Solis.

ASsumatur schema *Problematis præced.* Ex observatione omnium Astronomorum constat, diametrum Solis apparentem, sive angulum BFC majorem esse minutis 29; & *cap.*9. *Probl.*1 demonstravi, FN distantiam Solis à Terrâ majorem esse 949 semidiametris Terræ. Sed assumamus utrumque justo minus, diametrum videlicet apparentem minutorum 29, & distantiam FN semid. Terræ 949: sic enim certò constabit, molem Solis inde deductam adhuc esse verâ minorem.

Ex oculo F tanquam centro per centrum Solis N descripta intelligatur peripheria KNG. Quoniam radius FN est 949 semid. Terræ, ex hoc elicietur(a)circumferentiæ K N G semissis $2981\frac{41}{113}$ Sed omittamus fractionem: sic enim adhuc minor evadet Sol. Cum igitur semissis circumferentiæ, hoc est minuta 10800 efficiant semidiametros Terræ 2981; minuta 20 quot semid. Terræ efficient? Per *reg. prop.* proveniunt semid. Terræ $8\frac{49}{10800}$ pro arcu B C, sive diametro Solis minutorum 29. Verùm ut adhuc minor evadat Sol, assumamus pro Solis diametro tantùm semidiametros Terræ 8, sive diametros 4, sic ut diameter Terræ sit ad diametrum Solis, ut 1 ad 4. Hæc ratio si per quatuor terminos continuetur

(a) *Per prob.* 3. *c.* 12.

Diam. Terræ	Diam. Sol.		
1	4	16	64

Digitized by Google

erit, ut primus terminus nempè 1 ad quartum 64, ita (b) Terra ad Solem.

(b) *Per* 28. 12.

Certum est igitur Solem plus quàm quater & sexagies esse Terrâ majorem.

Atque hoc quidem omninò certum. Cæterùm satis etiam exploratum est, Solem continere Terram amplius quàm 1727 vicibus. Nam *cap.* 9. *Probl.* 2, ostendi distantiam Solis à Terrâ continere plus quàm 2850 Terræ semidiametros, & satis etiam certò constat diametrum Solis apparentem majorem esse minutis 30. Ex quibus datis per discursum *præced.* elicitur Solis diameter major 12 semidiametris Terræ. Atque inde ratione 1 ad 12 per quatuor terminos continuatâ (1. 12. 144. 1728.) habetur ratio Terræ ad Solem minor eâ, quæ est 1 ad 1727.

Imò verò, cum ex accuratissimis Lunæ dichotomæ observationibus Ricciolus invenerit Solis à Terrâ distantiam (x) continere semidiametros Terræ plures quàm 7000, ut dixi in *Scholio Probl.* 2. *cap.* 9 reperietur inde Sol Terrâ major plùs quàm vicies septies millies. Quam saltem magnitudinem Soli tribuendam confirmatur ex scrutinio Vendelini, qui ex suis Lunæ dichotomæ observationibus deduxit, Solis à Terrâ distantiam æquare semidiametros Terræ saltem 13740; ex qua moles Solis reperitur major Terrâ plus quàm ducenties millies. Igitur

(x) *Vide hæc accuratiùs deducta Astron. nostræ lib.* 3. *n.* 19.

Sum-

Digitized by Google

Digitized by Google

1 950 902500 857 (375000

(a) Per 28. 12.

erit (a) ut primus, nempè 1 ad quartum 857 (375000, ita Terra ad Orbem Magnum. Cum igitur secundus terminus 950 assumptus sit vero minor, etiam quartus erit vero minor.

Quare certum est, Orbem Magnum continere terram sæpiùs, quàm 857375000 unitatem.

(o) Vide Astron. lib. 3. num. 19.

Imò cum ex accuratissimis Lunaris dichotomæ observationibus (o) satis constet, distantiam Solis à centro Terræ nunquam minorem esse 7000 semidiametrorum Terr. si ratio 1 ad 7000 per quatuor terminos continuetur: 1, 7000, 49000000, 343000 (000000, erit Terra minor ad Orbem Magnum quàm 1 ad 343000 (000000.

CAPUT XXI.

Solidorum auctio, & diminutio, transformatio, comparatio.

Augere corpora, & diminuere in ratione datâ, seu (quod idem est) dato corpore aliud exhibere juxta rationem datam majus minusve, si corpora non requirantur similia, facile erit Geometriæ studioso elementum Euclidis undecimum, ac duodecimum non ignoranti. Pyramides enim, Coni, Prismata, Cylindri, cum ea, quæ ejusdem sunt generis, comparantur; si bases habeant æquales, sunt inter se ut altitudines, si easdem altitudines, inter se sunt

ut

Digitized by Google

ut bases; si neque basi, neque altitudine conveniant, rationem habent inter se ex basium, & altitudinum rationibus compositam. Ex quibus horum corporum auctio ac diminutio juxta rationem datam in promptu est vel tyronibus ipsis, quorum exercitationi proinde hoc argumentum relinquo.

At si duo corpora similia, ex. gr. duo cubi, duæ sphæræ, duo similes coni &c. desiderentur, quæ datam inter se habeant proportionem, ardua res petitur, quæ non nisi duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inventione possit absolvi. Atque hoc est celeberrimum illud Problema, quod Deliacum veteres appellarunt, in cujus solutionem Platonis hortatu omnes Græciæ Geometræ summo conatu incubuerunt. Modi ac viæ ad duas medias reperiendas subtilitate mirabili à Platone, Architâ, Menechmo, Eratosthene, Philone Bysantio, Herone, Apollonio Pergæo, Nicomede, Diocle, Sporo, Pappo excogitati, ab Eutocio in commentario ad 2 Archimedis librum de Sphærâ, & Cylindro recensentur. Antiquorum inventis sua recentiores addidere Ubernerus, Villalpandus, Gregorius à S. Vincentio, Cartesius. Verùm quia tanta constructionum varietas dispendio potius, quàm adjumento solet esse tyronibus, ex omnibus tres potissimùm modos, quorum tam constructio, quàm demonstratio est cæteris visa facilior, selegi, breviterque exposui, ac demonstravi in *Scholio prop. 13. libri 6. nostrorum elementorum*, ad quem locum studiosos remitto.

Restant quædam à tyronibus notanda.

1. Corpora similia definiri *defin. 9. lib. 11. & defin. 4. lib. 12.* 2. In-

2. Inter similia corpora censeri sphæras, quemadmodum circuli censentur inter similia plana.

3. Corpora similia esse inter se in triplicatâ ratione laterum homologorum. Demonstratum id est de parallelepipedis *p.* 33. *lib.* 11. de omni Prismate *coroll.* 2. *p.* 9. *lib.* 12. de Pyramidibus *p.* 8. *lib.* 12. de Conis, & Cylindris *p.* 12. *lib*, 12. de Sphæris *p.* 18. *lib.* 12.

4. Latera homologa definiri *defin.* 11. *lib.*

5. In sphæris latera homologa censentur ipsæ diametri; in Conis, & Cylindris diametri basium.

5. Omnes Sphæras esse necessariò similes: similiter omnes Cubos necessariò similes esse, ut patet ex *defin.* 9. *lib.* 11. omnes enim cubi continentur 6 quadratis, quæ sunt plana similia. Hoc ipsum ad reliqua corpora regularia extende.

PROBLEMA I.

Dato solido, aliud simile juxta datam rationem majus, vel minus exhibere.

Fig. 35. 36. DEtur primò Sphæra, cujus diameter A, & ratio data sit A ad B. Oporteat exhibere Sphæram novam ejusmodi, ut sphæra data sit ad novam, ut A est ad B.

Inter A, & B terminos rationis datæ inveniantur duæ mediæ (*b*) proportionales X, Z, sic ut A sit ad X, sicut X est ad Z, & X sit ad Z, sicut Z ad B. Sphæra diametri X est quæsita.

(b) *Per schol. p.* 1. 3. *lib.* 6.

Demonst. Nam cum per constr. A, X, Z, B sint

Digitized by Google

B sint quatuor continuè proportionales, erit ratio primæ A ad quartam B triplicata (c) rationis, quam prima A habet ad secundam X. Atqui ratio sphæræ, cujus diameter A ad sphæram, cujus diameter X, est etiam triplicata rationis A ad X per 18. 12. Ergo ratio sphæræ, cujus diameter A, ad sphæram diametri X æqualis est rationi A ad B. *Q. E. D.*

(c) *Per defin* 10. *l* 5.

Datus deinde sit Cylindrus, vel Conus, cui alius petatur similis in ratione datâ.

Diameter basis sit A, ratio data A ad B: inter A, & B inveniantur duæ mediæ X, Z. Erit X diameter baseos Coni, aut Cylindri quæsiti. Quare si circa X describatur circulus, & suprà eum fiat Conus, vel Cylindrus similis dato, is erit qui quæritur.

Demonstratio eadem, sed per 12. 12.

Detur tandem Cubus, vel Prisma quodvis, vel Pyramis, cujus latus sit A: ratio autem data sit A ad B.

Rursum inter A, & B inveniantur mediæ X, & Z: solidum, quod super X tanquam latere ipsi A homologo extruetur simile dato, est ipsum quod quæritur.

Demonstratio eadem, sed per 33. *lib.* 11., vel per *coroll.* 2. *p.* 19. *lib.* 12., vel per 8. *lib.* 12.

Quod si ratio data numeris exprimatur, tunc inter duos datos numeros inveniendi sunt duo medii proportionales, si id erit possibile, ut docui *lib.* 5. *Arith. cap.* 7. *Probl.* 2. Sin verò id impossibile est, reperientur duæ mediæ proportionales Geometricè. Exemplum esto in duplicatione cubi. Termini rationis datæ sunt 2, & 1: inter hos (a) nulli possunt reperiri medii proportionales numeri seu integri, seu fracti

(a) *Per theor.* 2. *c.* 7 *l* 5. *Arith. nostræ.*

Fig. 16.

cti. Quare, ut Problema absolvi possit ad Geometriam oportebit refugere. Latus ergo cubi dati esto A, cujus dupla sit B. Inter A, & B inveniantur duæ rectæ mediæ prop. X, Z. Erit X latus cubi, qui dati duplus est.

PROBLEMA II.

Prismati Pyramidem, Cylindro Conum, Sphæræ Cylindrum exhibere æqualem, & contrà.

Super basi Prismatis fiat Pyramis triplo altior Prismate, & super basi Cylindri fiat Conus triplo altior Cylindro: erit Pyramis (*d*) Prismati, & Conus (*e*) Cylindro æqualis.

(d) *Per* 7. 12.
(e) *Per* 10. 12.

Contra si Pyramidi Prisma, vel Cono Cylindrus petatur æqualis, sumantur altitudines subtriplæ, retentisque iisdem basibus erit Prisma Pyramidi triplo se altiori, & Cylindrus Cono etiam triplo altiori æqualis.

Fig. 38.

Ut datæ Sphæræ P V Cylindrum æqualem exhibeas, sume FO duas tertias diametri F N pro altitudine Cylindri, & maximum Sphæræ circulum pro basi. Patet ex *prop.* 32 *selectorum nostr. ex Archimede*, Cylindrum GIKH altitudinis F O æquari Sphæræ.

His perceptis quis non pariter credat, in promtu esse, Cylindro æqualem exhibere sphæram? Atqui hoc non nisi per duas medias obtinebitur, pro quo sit.

PROBLEMA III.

Dato Cylindro AB sphæram æqualem invenire.

Fig. 37. 38

Ex diametro A E basis Cylindri sume A S duas tertias, atque inter latus Cylindri AL, & AS

& AS inveni duas medias XA,ZA,ut sint 4 pro portionales continuè LA,XA,ZA, AS. Harum proportionalium tertiæ Z A parem accipe FO quam auge dimidiâ sui parte ON, sic ut F O sit duæ tertiæ totius FN. Sphæra PV, cujus diameter est F N, Cylindro dato A L æqualis erit.

Demonstr. Sphæræ Cylindrum H Q circumscribe, à quo per O abscinde Cylindrum G K qui per præced. Spheræ FPN æqualis est. Sumptâ deinde ex Cylindri AB latere AL rectâ AC pari AS; duabus tertiis baseos AE, per C abscinde Cylindrum AM. Quoniam GH diameter baseos Cylindri GK est par sphæræ diametro FN quæ (*a*) est sesquialtera ipsius FO, sive GI; etiam GH erit sesquialtera ipsius GI. Sed etiam AE est sesquialtera (*b*) ipsius AC. Ergo GH est ad GI, ut AE ad AC; & permut. GH est ad AE, ut GI ad AC. Ergo Cylindri GK, AM (*c*) similes sunt, ac proinde eorum ratio triplicata (*d*) est rationis, quæ est inter basium diametros GH, AE, seu inter altitudines GI, CA. Atqui GI, seu FO est par rectæ ZA adeoque ratio GI ad CA est ratio ZA ad CA. Ergo ratio Cylindrorum GK, AM est triplicata rationis ZA ad CA, hoc est (quia (*e*) continuè proportionales sunt LA, XA, ZA, CA) rationis LA ad XA. Atqui etiam ratio Cylindri A L ad Cylindrum AM est triplicata rationis LA ad XA, nam Cyl. AL est ad Cyl. AM, ut (*f*) LA ad CA, ratio autem LA ad CA est triplicata (*g*) rationis L A ad X A. Ergo ratio Cylindri A B ad Cylindrum A M par est rationi Cylindri G K ad eundem A M. Ergo Cylindrus G K, hoc est sphæra F P N æqualis est Cylindro A L.

Q. E. D.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA IV.

Superficies Cylindricam, Conicam, Sphæricam ad Circulum reducere.

(a) Per 13. 6.

1. INter latus Cylindri recti, & basis diametrum inveni (*a*) mediam proportionalem: hæc est radius circuli, qui curvæ superficiei Cylindricæ æqualis est. Demonstrationem *vide in selectis nostris ex Archimede prop.* 11.

2. Inter latus coni recti, & radium basis inveni mediam prop. Hæc est radius circuli, qui conicæ superficiei curvæ æqualis est. Demonstrationem habes *in selectis Arch. prop.* 13.

3. Circulus, cujus radius est sphæræ diameter æquatur superficiei sphæricæ. Demonstrationem vide in *selectis ex Arch. prop.* 24 *ejusque corollario*.

PROBLEMA V.

Dato parallelepipedo cubum æqualem invenire.

Fig. 39. 40.
(a) Per 16. 2.
(b) Per 31. 11.
(c) Per 34. 11.

SI datum parallelepipedum non habeat basim quadratam, ad eam reducatur: quod fiet si basi parallelogrammæ fiat æquale (*a*) quadratum AM, superque illo statuatur in eâdem altitudine parallelepipedum AR; erit hoc (*b*) dato æquale.

Sit jam factum, quod quæritur, & cubus FK æqualis esto parallelepipedo AR. Igitur (*c*) BA alti-

Digitized by Google

ejuſdem altitudinis cum cylindro, vel pyramis ejuſdem altitudinis cum cono: æquale erit priſma cylindro; pyramis cono.

(a) Per 11. 12. ejuſque Coroll.

Demonſt. Cum cylindrus, & priſma æquè alta, ſint inter ſe (*a*) ut baſes; baſes autem æquales ſint; etiam ipſa erunt æqualia. Eadem eſt ratio coni, & pyramidis.

PROBLEMA VII.

Datæ ſphæræ cubum proximè æqualem invenire.

(b) Per prob. 2.
(c) Per prob. 6.
(d) Per prob. 5.

SPhæræ æqualis (*b*) reperiatur cylindrus; cylindro (*c*) æquale parallelepipedum; parallelepipedo (*d*) æqualis cubus: erit is ſphæræ datæ æqualis.

Igitur ad ſphæræ cubaturam opus eſt quadraturâ circuli, atque inſuper duabus mediis.

PROBLEMA VIII.

Dato annulo circulari cylindrum, vel ſphæram proximè æqualem invenire.

Fig. 41.

SI hoc problema Geometricè ſolvatur, habebitur linea recta circulari æqualis.

(n) Per prob. 5. c. 12.

Circumferentiæ E D, à centro E genitoris circuli C K B F circa A deſcriptæ, reperiatur (*n*) quàm proximè æqualis recta. Cylindrus, cujus baſis eſt circulus annuli genitoris CKBF, altitudo autem recta peripheriæ E D æqualis, ipſi annulo æquatur; & cylindrica ejuſdem ſuperficies ſuperficiei annuli etiam æqualis eſt.

De-

centrum gravitatis circa revolutionis axem descripsit: atque ita corporis annularis non tantùm soliditas, sed etiam superficies in rectam æqualem, & soliditatem, & superficiem erit extensa.

Demonstratio pendet à theoremate, quod demonstravi *lib. 5. Cyl. & Annul. totâ parte 1. & 2.*

PROBLEMA XI.

Annulo parabolico obtuso circularem cylindrum, vel sphæram absolutè æqualem exhibere.

Fig. 42.

DUæ æquales, & similes parabolæ B D C, BGC ita sint dispositæ, ut axes DF, GF habeant in directum, & parallelos axi revolutionis XZ, basim verò B C communem, & tam ad D F G, quàm X Z perpendicularem. Hæ parabolæ circa X Z circumactæ annulum producunt parabolicum, quem obtusum voco.

Oporteat igitur huic annulo cylindrum absolutè æqualem reperire.

Constr. Divide semibasim F C in 8 æquales partes, & fiat ut tres octavæ ipsius FC ad FA, ita GD ad aliam, quam vocemus Y. Dico cylindrum, cujus altitudo est Y, basis verò circulus diametri BC, seu RQ, æqualem esse dato parabolico annulo.

Demonstr. Conois parabolica duplicata, genita à parabolis BDC, BGC circa DG rotatis, est ad annulum genitum ab iisdem rotatis circa XZ, (*a*) ut tres decimæ sextæ ipsius FC ad FA.

(a) *demonstravi l. 3. Cyl., & Annul. prop. 47.*

At-

Digitized by Google

Atqui cylindrus QP conoidi parabolicæ circumscriptus conoideos (*b*) duplus est. Ergo cylindrus QP est ad annulum parabolicum, ut 6 decimæ sextæ ipsius F C ad F A, hoc est ut tres octavæ ipsius FC ad FA. Atqui cylindrus QP est ad cylindrum ejusdem secum basis, sed altitudinis Y, ut G D est ad Y, hoc est (*c*) ut tres octavæ ipsius FC ad FA. Ergo cylindrus QP ad cylindrum altitudinis Y, & basis ejusdem eamdem rationem habet, quam ad annulum parabolicum. Quare cylindrus ille annulo dicto æqualis est. Quod erat propositum.

(b) *Ibid. per prop. 31. lib. 2.*

(c) *Per const.*

PROBLEMA XII.

Annulo parabolico acuto cylindrum, vel sphæram absolutè æqualem exhibere.

DUæ æquales, & similes parabolæ BDC, BGC ita sint dispositæ, ut axes FD,FG habeant positos indirectum, & perpendiculariter ad revolutionis axem XZ, basim verò communem BC perpendicularem ad DFG, & revolutionis axi X Z parallelam. Hæ parabolæ circa XZ rotatæ producunt annulum, quem voco Parabolicum acutum.

Fig. 43.

Pari modo solidum, quod fit à parabolâ BDC circa basim BC revolutâ, Conoidem parabolicam acutam appello.

Constructio. Fiat ut quinta pars axis FG ad FA revolutionis radium, ita CB basis ad aliam, quam vocemus S. Ex hac sume octo decimas quintas. Dico cylindrum, cujus basis est

Digitized by Google

circulus diametri D G, altitudo autem octo decimæ quintæ ipsius S, æqualem esse annulo dato.

Demonstr. Conoidi acutæ parabolicæ circumscriptus sit cylindrus QN: cylindro autem altitudinis S suprà basim ejus inscripta intelligatur parabolica conois acuta. Cylindrus QN est ad acutam conoidem parab. DBGC, ut (*a*) 15 ad 8. Pari modo cylindrus altitudinis S ad sibi inscriptam est, ut 15 ad 8. Igitur permutando ut cylindrus QN est ad cylindrum altitudinis S, ita conois acuta parabolica DBGC est ad illam alteram. Atqui cylindrus QN est ad cylindrum altitudinis S, ut (*b*) altitudo CB ad altitudinem S, hoc est (*c*) ut quinta pars axis F C ad F A. Ergo etiam conois acuta parabolica BDGC est ad illam alteram conoidem acutam parab. cylindro altitudinis S inscriptam, ut quinta pars axis FG ad FA. Atqui etiam conois acuta parab. DBGC est ad datum annulum acutum parabolicum, ut (*d*) quinta pars axis FG ad FA. Ergo conois DBGC ad annulum datum, & ad conoidem dictam cylindro altitudinis S inscriptam eamdem rationem habet, ac proinde dicta conois acuta annulo dato æqualis est. Atqui cylindrus, cujus basis est circulus diametri D G, seu QP, altitudo verò octo decimæ quintæ rectæ S, conoidi dictæ æqualis est (nam cylindrus, cujus basis est circulus diametri DG, altitudo S, ad cylindrum, cujus eadem basis, altitudo autem 8 decimæ quintæ ipsius S est, (*o*) ut 15 ad 8; & idem ille cylindrus altitudinis S est ad dictam conoidem acutam parab. sibi inscriptam, ut (*e*) 15 ad 8). Ergo cylindrus, cujus basis est circulus diametri DG, altitudo autem 8 decimæ

(a) *Demonstravi l. 5. Cy., & Annul. in Coroll. prop. 20.*

(b) *Per 13. 12.*

(c) *Per const.*

(d) *demonstravi l. 5. Cyl., & Annul. prop. 25.*

(o) *Per 13. 12.*

(e) *Per Cor. p. 20. lib. 5. Cyl., & Annul.*

cimæ

Digitized by Google

cimæ quintæ rectæ S, dato annulo acuto parabolico æqualis est. *Q. E. D.*

Scholium.

Quis primo aspectu non putet, annulo parabolico cylindrum parabolicum æqualem exhibere facilius esse, quàm circularem? Atqui hunc quidem problemate hoc & præcedenti ex nostris Annularibus, favente Deo, jam in lucem protulimus: alterum nemo dabit, quin unà circuli quadraturam exhibeat.

PROBLEMA XIII.

Solido annulari hyperbolico Sphæram absolutè æqualem exhibere.

ESto hyperbola BGC, cujus axis FG; centrum A; basis ad axem recta BC; axis revolutionis XZ ad FGA rectus. *Fig. 44.*

Oporteat solido annulari genito ab hyperbolâ G B C circa X Z in orbem ductâ sphæram absolutè æqualem exhibere.

Constr. Si latus rectum hyperbolæ axi debitum, transverso axi (nimirùm ipsi G A bis sumptæ) æqualis est, erit sphæra, cujus diameter est ipsa hyperbolæ basis BC, dato annulari solido hyperbolico æqualis. Quod si latus rectum transverso axi est inæquale, fiat ut latus rectum ad axem transversum, ita sphæra diametri BC ad aliam sphæram: erit hæc dato hyperbolico annulari solido æqualis.

Demonstr. habetur ex *prop.* 42 *lib. nostri* 5 *Cyl.*, & *Annul.*, quæ una ex istius libri præcipuis est.

Equi

Digitized by Google

Equidem fateor, me hoc invento lætatum fuisse, adeoque venisse in spem, fore ut alterum quoque annulare solidum, quod fit ab hyperbolâ BDC circa eumdem axem XA, ad sphæram reducerem. Quo obtento, haberi quadraturam hyperbolæ demonstravi ibidem prop. 43. At me quidem hactenus spes ista fefellit.

PROBLEMA XIV.

Similium corporum proportionem cognoscere.

Fig. 45. DEntur ex. gr. duæ spheræ FG, KL quarum diametri sint A, B. Quæritur quanto spæra FG major sit sphærâ KL.

Ratio diametri A ad diametrum B continuetur (*a*) per 4 terminos, hoc est fiat ut A ad B, ita B ad C, & C ad D. Erit sphæra FG ad sphæram KL, ut recta prima A ad quartam rectam D.

(a) *Per 13. 6, vel potius per prob. Scholii.*

Nam sphæra est ad sphæram in triplicatâ ratione diametrorum per 18. 12; hoc est per defin. 10. 5, ut A prima proportionalium ad D quartam.

Exemplum addamus numericum. Diameter sphæræ minoris esto unius pedis, diameter sphæræ majoris 10. Quæritur sphærarum proportio.

Continuetur ratio diametrorum, quæ est 1 ad 10 per quatuor terminos.

1——10——100——1000

Erit sphæra minor ad majorem ut primus termi-

minus,
de maj
licèt di
continc
trum ut
quatuor
nor ad
Quæ
corpora
apparet
graviter
dine co
& quæ
manus a

Digitized by Google

Fig. 1.

C
F
X
G
A
L
I
E
Q

2.

B
L
I

10.

17.

C
1000 milles
B
A

18.

1000 part
B

27.

b
x

Digitized by Google

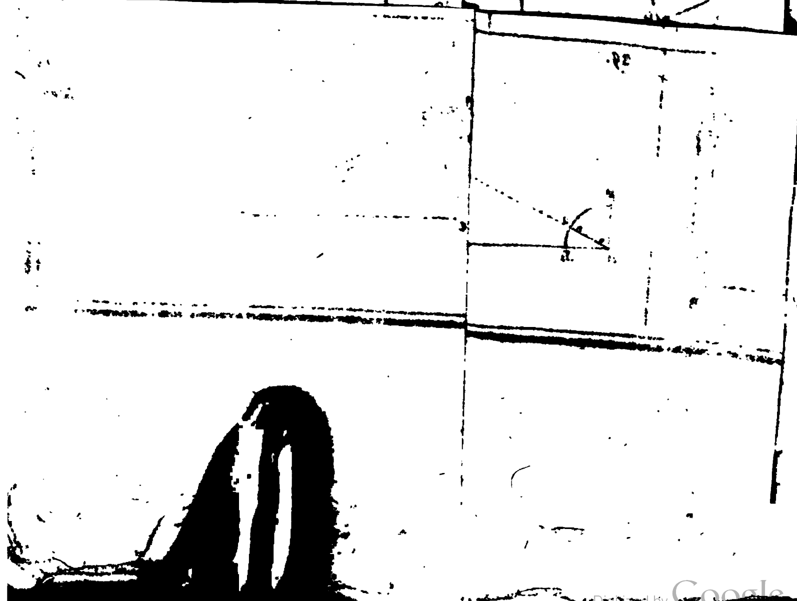
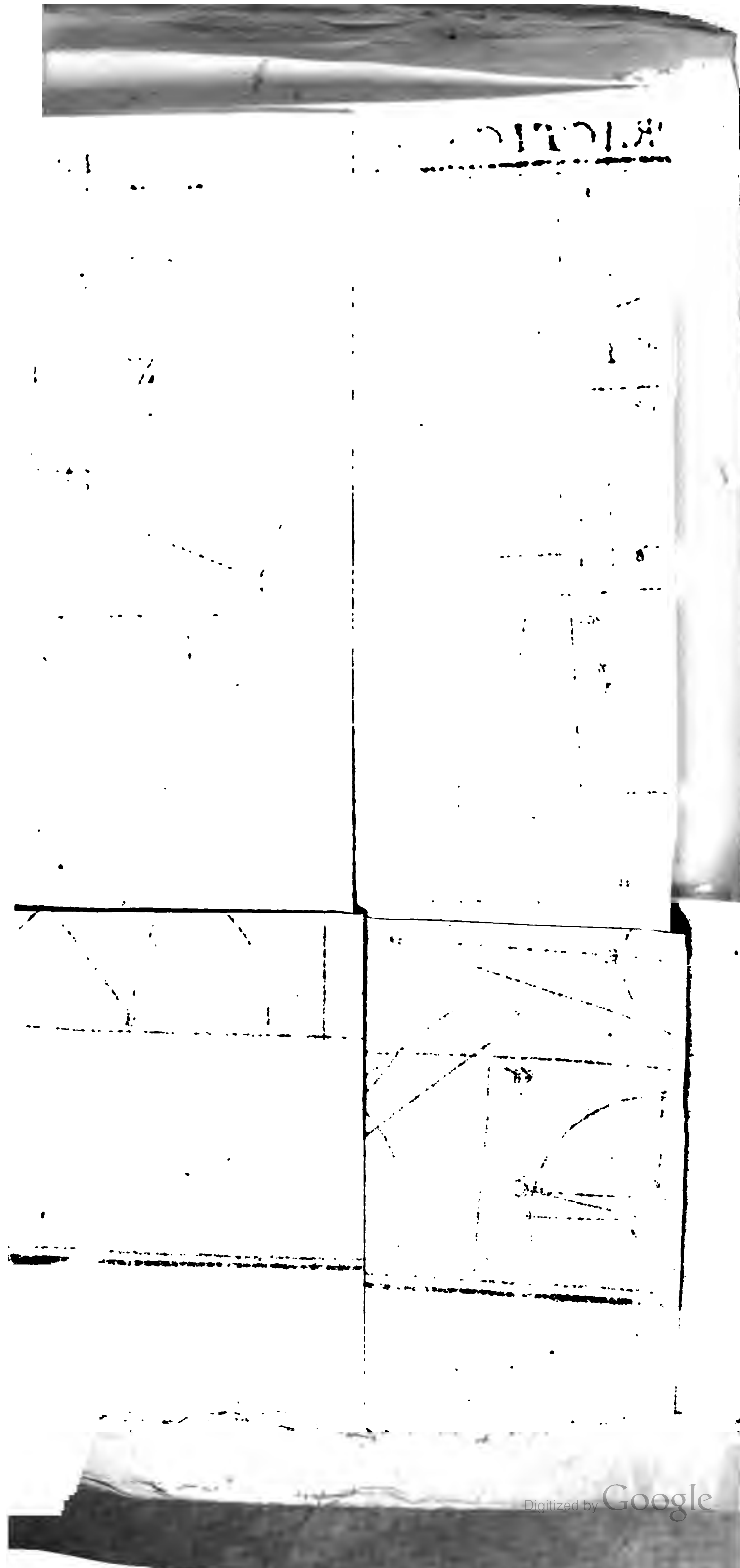


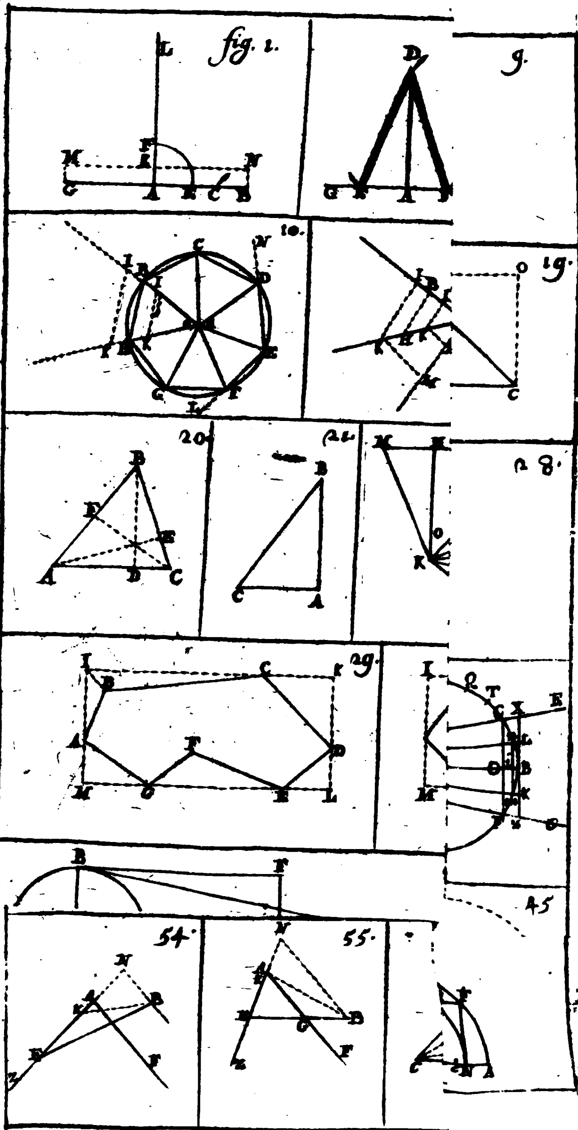
fig. 42.

49

57.

Digitized by Google




fig. 1.
9.
10.
19.
20
21
28.
29.
45
54.
55.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google